Geometría Analítica I

Lectura 2

Ayudante: Guilmer González Día 30 de agosto, 2005

El día de hoy veremos:

1. Problemas comunes que se tuvieron con el examen, resolver, comentar las ideas, no entrar en detalles.
2. Método de Newton.

1 Problemas con los Trabajos

Los problemas que se observaron en los trabajos fueron

1. Descripción del problema. El problema a resolver debe ser descrito, bajo la idea de platicarlo a otro y convencerle con nuestros argumentos.
2. No están estudiando, es necesario revisar y tener presente los temas de la geometría del triángulo y del círculo.

2 Método de Newton

Consideremos el siguiente problema: **Encontrar el cero de una función**, de manera particular, las raíces de un polinomio.

Un método numérico para encontrar cero de funciones, es el Método de Newton, que se basa en aproximar la función $f(x)$ por medio de un modelo lineal $m(x)$ en una vecindad de un punto $x = x_0$,

$$m(x) = ax + b \approx f(x)$$

para luego, encontrar el cero del modelo lineal, este problema que es más sencillo debe ser resuelto eficientemente.

Dado un punto $x = x_0$, considerando a la función y su derivada, el modelo lineal obtenido con los primeros términos del desarrollo de Taylor de $f(x)$ alrededor de $x = x_0$, tiene la forma

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Otra forma de obtener el modelo, es considerando la información que se tiene: se cuenta con un punto de la gráfica $(x_0, f(x_0))$, y dado que la función es suave, es polinomial, contamos con la derivada de la función, por lo que es múy fácil obtener una representación para la recta que pasa por $(x_0, f(x_0))$ y es tangente al mismo, esa representación es la que se indicó anteriormente.

De esta expresión para el modelo lineal, resolvemos el cero $m(x) = 0$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

es decir, encontramos el punto que corta al eje x. Esta será nuestra aproximación al cero de $f(x)$ a partir de x_0. La idea del método de Newton es iterar con el nuevo punto obtenido hasta lograr un criterio de paro, lo que es válido para funciones muy suaves. Observemos de manera gráfica el algoritmo, representado en la Figura 1.

El método de Newton es un método iterativo que converge rápidamente si nos encontramos cerca de la solución, y bajo ciertas condiciones, sobre la derivada y segunda derivada, podemos asegurar convergencia al cero (nos vamos acercando cada vez más `dar una idea gráfica de esto`).

Este método es iterativo, en el sentido de que partiendo de una aproximación, digamos $x = x_n$, la corregimos para lograr otra

$$x_{n+1} = x_n + c_n$$

donde

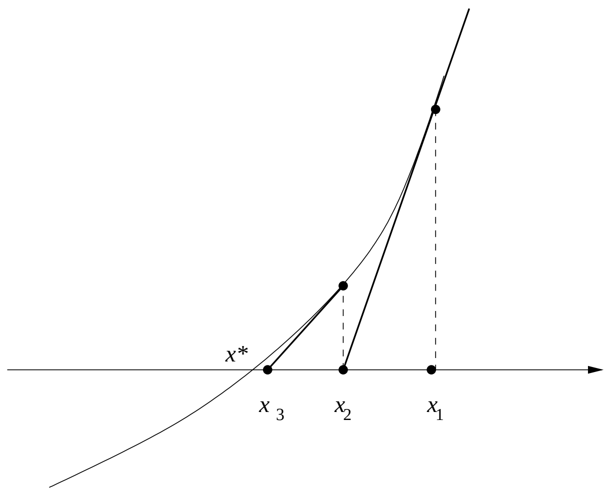

Figura 1: Proceso gráfico del Método de Newton.

$$c_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n))}$$

es la corección a la aproximación x_n.

`Observar en clase que la aproximación primera, de la que se parte o condición inicial es un arte. Observar que si estamos cerca de la solución, el método converge rápidamente.`

Ejemplo: Encontremos la raiz cuadrada de 5.

Procedimiento: A través del método de Newton, encontremos $\sqrt{5}$. Para esto, debemos transformar el problema a encontrar $\sqrt{5}$ como el cero de una función polinomial. Observando que $x = \sqrt{5}$, tenemos que $x^2 = 5$, luego $x = \sqrt{5}$ es un cero de la función cuadrática $f(x) = x^2 - 5$. La función es polinomial, contamos con su derivada en todo punto $f'(x) = 2x$. Ahora necesitamos un punto inicial adecuado.

Observemos cómo se comporta la solución al rededor de $\sqrt{5}$

1) Si $x > 3$, $f(x) > 0$.

2) Si $0 < x < 1$, $f(x) < 0$

por consiguiente en el intervalo $[1,\ 3]$ encontramos $\sqrt{5}$. Porpongamos $x_1 = 2$. El método de Newton nos dice que:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

`Comentar que` $f'(x_n) \neq 0$.

con lo que obtenemos que $x_2 = 2.5$, usando esta información, para el siguiente paso

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

obtenemos que $x_3 = 2.3611$. Haciendo algunos pasos más obtenemos la sucesión

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 2.5 \\ x_3 &= 2.2361111111 \\ x_4 &= 2.2360679779 \\ x_5 &= 2.2360679774 \end{aligned}$$

si contaramos con más cifras, en una iteración más ganaríamos 10 cifras decimales.

`Comentar sobre la importancia del punto inicial.`

Ejercicios: Calcular los ceros de las siguientes funciones a través del método de Newton:

1. $f(x) = x^3 - x$
2. $f(x) = x^3 + x^2$
3. $f(x) = x^3 - 2x - 1$
4. $f(x) = -2x^3 + x^2 + x - 1$

Observar la rapidez de convergencia del método. Observar que no siempre esto ocurre, que existen casos patológicos, citar la referencia:

http://www.math.umn.edu/~garrett/qy/BadNewton.html

donde se trata de resolver el cero de

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 0.4$$

Debemos asegurar un intervalo donde se encuentre el cero, y ahí experimentar. Mientras más pequeño sea éste, más rápido obtendremos una proximación al cero de $f(x)$, en realidad importa que la función sea ‘‘convexa’’ cerca del cero.