Geometría Analítica I

Lectura 12

Ayudante: Guilmer González — Día 25 de noviembre, 2005

El día de hoy veremos:

0. Comentarios sobre los trabajos últimos.
2. Trazar una parábola.

1 Trazar cónicas

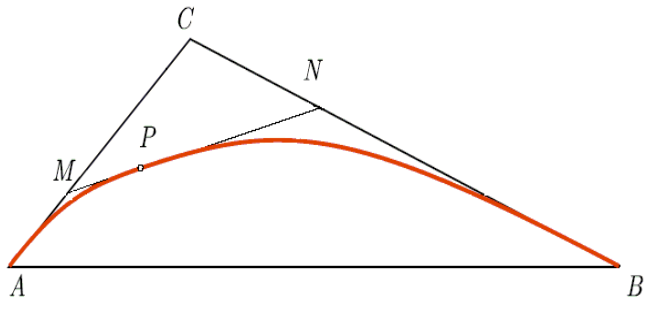
En un triángulo ABC, considere el punto M que divide al segmento $\overline{AC}$ en la razón t. Esto esto, le hemos asignado una masa $1-t$ a A y t a C.

Observe que el valor de t se encuentra entre cero y uno, ya que el punto M nos interesa dentro del segmento $\overline{AC}$.

De la misma forma, tomemos el punto N que divide a $\overline{BC}$ en la misma razón t. Ahora bien, localicemos P sobre el segmento comprendido entre $\overline{MN}$ que lo divida en la misma razón. t.

Para cada valor de t entre 0 y 1, obtendremos un punto $P(t)$. El lugar geométrico de los puntos P es una parábola!!! Veamos que esto ocurre.

Consideremos el triángulo que forman esos puntos, desde luego no colineales, y hagamos los trazos.



Consideremos un punto de origen, en alguna parte de la hoja, y usemos vectores. Segun esto M divide a $\overline{AC}$ en t. Esto significa que el punto M se encuentra a una distancia t veces proporcional de A, y $1-t$ veces proporcional a C, esto es

$$\vec{OM} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OC}$$

Ahora bien, N divide a $\overline{CB}$ en t. Esto significa que el punto N se encuentra a una distancia t veces proporcional de C, y $1-t$ veces proporcional a B, esto es

$$\vec{ON} = (1-t)\vec{OC} + t\vec{OB}$$

Siguiendo este argumento, el vector $\vec{OP}$ lo escribimos como

$$\vec{OP} = (1-t)\vec{OM} + t\vec{ON}$$

Ahora bien, identifiquemos $\vec{OP}$ en términos de los vértices del triángulo

$$\begin{aligned}
\vec{OP} &= (1-t)\vec{OM} + t\vec{ON} \\
&= (1-t)[(1-t)\vec{OA} + t\vec{OC}] + t[(1-t)\vec{OC} + t\vec{OB}] \\
&= (1-t)^2\vec{OA} + 2t(1-t)\vec{OC} + t^2\vec{OB}
\end{aligned}$$

Una representación compacta para esa colección de puntos P, en términos de el parámetro t.

Veamos un ejemplo sencillo. Consideremos los puntos de control $A(0,0)$, $B(1,0)$ y $C(0,1)$. Tomando $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\vec{OM} &= (1-t)\vec{OA} + t\vec{OC} \\
&= t(0,1)
\end{aligned}$$

es decir, el punto M tiene coordenadas $M(0,t)$. Ahora bien

$$\begin{aligned}\vec{ON} &= (1-t)\vec{OC} + t\vec{OB} \\ &= (1-t)(0,1) + t(1,0) = (t, 1-t)\end{aligned}$$

es decir, el punto N tiene coordenadas $N(t, 1-t)$, con esto

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= (1-t)\vec{OM} + t\vec{ON} \\ &= (1-t)(0,t) + t(t, 1-t) \\ &= (t^2, 2t(1-t))\end{aligned}$$

Es decir, la ecuación paramétrica del lugar geométrico $P(x, y)$ es

$$\begin{aligned}x &= t^2 \\ y &= 2t - 2t^2\end{aligned}$$

Si se observa, la tangente a esa curva en un punto genérico, tiene la dirección $(t, 1-2t)$, el cual coincide con el vector $\vec{MN}$. Observemos que para $t = 0$, se tiene el punto A, y la tangente aquí es $(0, 1)$. Si $t = 1$, se obtiene el punto B, y la tiene la dirección $(1, -1)$ que representa la dirección de $\vec{CB}$.

Si eliminamos el parámetro t, tendremos

$$4x^2 + y^2 + 4xy - 4x = 0$$

la ecuación implícita de una parábola, rotada bajo un cierto eje, claro.

Ejercicio: Dado el polígono de control $A(0, 2)$, $B(1, 3)$ y $C(1/2, 2)$. Encuentre la cónica que describe.