

Geometría Analítica I

LECTURA 11

Ayudante: Guilmer González

Día 23 de noviembre, 2005

El día de hoy veremos:

0. Comentarios sobre los trabajos últimos.
2. Algoritmo para calcular la distancia entre dos líneas.

1 Forma paramétrica de una línea

En $2D$ se observó que requerimos de un vector \vec{a} , el llamado vector de dirección y un punto Q sobre la recta para describir, mediante un parámetro α , los puntos P sobre la línea.

$$P(\alpha) = Q + \alpha\vec{a}$$

De manera práctica, podemos describir la línea que pasa por dos puntos de la siguiente forma:

Sean P_0 y P_1 dos puntos sobre una línea. $\vec{P_0P_1} = P_1 - P_0$, es un vector que parte de P_0 hacia P_1 . $t(P_1 - P_0)$ es un vector t veces $\vec{P_0P_1}$.

$$P(t) = P_0 + t(P_1 - P_0)$$

para $-\infty < t < \infty$, describe la línea que pasa por P_0 y P_1 .

Esta es la forma en que hemos trabajado la descripción de los puntos sobre una línea.

Una observación importante, es que esta representación de la línea que pasa por dos puntos, es independiente de la dimensión del problema. Trabaja tanto para $2D$ como para $3D$, y en general en \mathbb{R}^n .

Como una observación particular, si el parámetro t es tal que $0 \leq t \leq 1$, tenemos una descripción para los puntos que se encuentran entre P_0 y P_1 .

Ejercicio: Describa los puntos de la recta que pasan por $A(1, 2, 1)$ y $B(3, 1, 4)$. Pasar a alguien a la pizarra.

2 Distancia entre dos rectas

Hemos aprendido a calcular distancia de un punto a una recta, y hacia un segmento de recta. Llegamos a una representación inmediata para la distancia de entre dos figuras F_1 y F_2

$$d(F_1, F_2) = \min_{P \in F_1, Q \in F_2} d(P, Q)$$

Un caso particular que nos compete, es el cálculo de la distancia entre dos rectas. Este es un problema muy interesante ya que desde un punto de vista computacional y práctico, es importante saber en qué momento dos puntos que siguen una trayectoria estarán lo más cercanos posible. Esos puntos pueden representar barcos moviéndose en cierta dirección o naves en distintos planos.

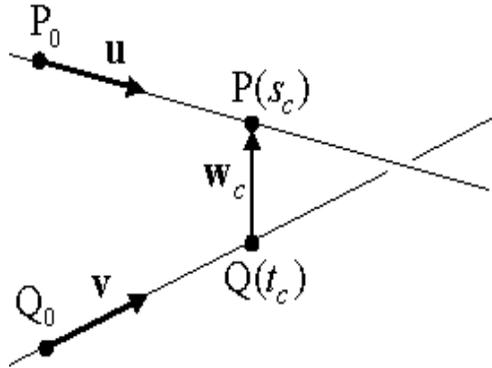
Sean \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 , nuestras rectas. Consideremos la forma vectorial de representar una recta; sea P_0 un punto de la recta \mathcal{L}_1 , y Q_0 de la recta \mathcal{L}_2 . Sea \vec{u} , un vector de dirección de la recta \mathcal{L}_1 y \vec{v} uno para la recta \mathcal{L}_2 , con esto tenemos que

$$\begin{aligned} P(s) &= P_0 + s\vec{u}; & s \in \mathbb{R} \\ Q(t) &= Q_0 + t\vec{v}; & t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$P(s)$ describe la línea \mathcal{L}_1 y $Q(t)$ describe la línea \mathcal{L}_2 .

Para cada (s, t) , consideremos $\vec{w}(s, t)$, el vector que va de un punto $Q(t)$ de \mathcal{L}_2 a un punto $P(s)$ en \mathcal{L}_1 . La idea primera es encontrar $\vec{w}(s_c, t_c)$ que minimicen la magnitud de $\vec{w}(s, t)$, para cualesquiera s y t .

$$\begin{aligned}d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) &= \min_{s,t} |\vec{w}(s, t)| \\ &= |\vec{w}(s_c, t_c)|\end{aligned}$$



Observación:

Como observamos en clase, si las rectas no son paralelas, el segmento $\overline{P(s_c)Q(t_c)}$ une los puntos más cercanos entre las rectas es único, y es perpendicular a las dos rectas; es decir, ningún otro segmento tiene esta propiedad.

Con esta observación, el vector $\vec{w}_c(s_c, t_c)$, es perpendicular tanto al vector de dirección u como a v . Es decir:

$$\vec{u} \cdot \vec{w}_c = 0; \quad \vec{v} \cdot \vec{w}_c = 0$$

un problema que hemos resuelto en reiteradas ocasiones. Resolvamos de nuevo.

Por una parte, tenemos que

$$\vec{w}_c = P(s_c) - Q(t_c) = \vec{w}_0 + s_c\vec{u} - t_c\vec{v}$$

donde $\vec{w}_0 = P_0 - Q_0$. La condición de perpendicularidad en ambas rectas nos conduce a resolver un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (\vec{u} \cdot \vec{u})s_c - (\vec{u} \cdot \vec{v})t_c &= -\vec{u} \cdot \vec{w}_0 \\ (\vec{v} \cdot \vec{u})s_c - (\vec{v} \cdot \vec{v})t_c &= -\vec{v} \cdot \vec{w}_0 \end{aligned}$$

para simplificar, nombremos $a = \vec{u} \cdot \vec{u}$; $b = \vec{u} \cdot \vec{v}$; $c = \vec{v} \cdot \vec{v}$; $d = \vec{u} \cdot \vec{w}_0$ y $e = \vec{v} \cdot \vec{w}_0$, con esto el sistema anterior lo escribimos como

$$\begin{aligned}as_c - bt_c &= d \\bs_c - ct_c &= e\end{aligned}$$

cuya solución para s_c y t_c es

$$s_c = \frac{be - cd}{ac - b^2} \quad \text{y} \quad t_c = \frac{ae - bd}{ac - b^2}.$$

siempre que el denominador no sea cero.

Observemos el denominador. $ac - b^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta(\vec{u}, \vec{v}))^2 = (|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta(\vec{u}, \vec{v}))^2 \geq 0$. Es decir, son no negativos. Cuando $ac - b^2 = 0$, se tiene que las dos ecuaciones son dependientes, las dos rectas son paralelas y por consiguiente, la distancia entre las líneas es constante. Este problema puede ser resuelto de manera separada, fijando un punto P_0 en \mathcal{L}_1 y encontrando la distancia de ese punto a la otra recta.

Al haber encontrado s_c y t_c , contamos ya con una expresión simple para calcular la distancia entre dos rectas \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2

$$d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = |P(s_c) - Q(t_c)| = \left| (P_0 - Q_0) + \frac{(be - cd)\vec{u} - (ae - bd)\vec{v}}{ac - b^2} \right|$$

Ejercicio: Calcule la distancia entre la recta \mathcal{L}_1 , que pasa por los puntos $P_{11}(1, 2, 1)$ y $P_{12}(3, 1, 4)$; y la recta \mathcal{L}_2 que pasa por $P_{21}(2, 2, 6)$ y $P_{22}(4, 1, 1)$.