Geometría Analítica II

Tarea-Examen 1

Profesor: Pablo Barrera   Día 1 de abril, 2005

Nombre: ____

Resuelva adecuadamente los siguientes ejercicios.

1. Dados dos puntos $A(x_a, y_a, z_a)$ y $B(x_b, y_b, z_b)$, muestre que el punto de intersección de la recta perpendicular que une a dichos puntos y que parte del origen es

$$\begin{pmatrix} \dfrac{(x_a(y_b^2 + z_b^2) + x_b(y_a^2 + z_a^2) - (x_a - x_b)(y_a y_b + z_a z_b)}{d(A,B)^2} \\ \dfrac{(y_a(x_b^2 + z_b^2) + y_b(x_a^2 + z_a^2) - (y_a - y_b)(x_a x_b + z_a z_b)}{d(A,B)^2} \\ \dfrac{(z_a(x_b^2 + y_b^2) + z_b(x_a^2 + y_a^2) - (z_a - z_b)(x_a x_b + y_a y_b)}{d(A,B)^2} \end{pmatrix}.$$

2. Muestre que la reflexión del punto $A(x_a, y_a, z_a)$ con respecto al plano

$$\lambda x + \mu y + \nu z + \rho = 0,$$

tiene por coordenadas

$$\begin{pmatrix} \dfrac{(\mu^2 + \nu^2 - \lambda^2)x_a - 2\lambda\mu y_a - 2\lambda\nu z_a - 2\lambda\rho}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} \\ \dfrac{(\lambda^2 + \nu^2 - \mu^2)x_a - 2\mu\nu y_a - 2\mu\lambda z_a - 2\mu\rho}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} \\ \dfrac{(\nu^2 + \lambda^2 - \mu^2)x_a - 2\nu\lambda y_a - 2\nu\mu z_a - 2\nu\rho}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} \end{pmatrix}.$$

3. Describa un método para obtener la ecuación de una la línea reflejada con respecto a un plano dado.

4. Muestre que la proyección ortogonal de la recta

$$\frac{(x - x_a)}{l} = \frac{y - y_a}{m} = \frac{z - z_a}{n},$$

sobre el plano

$$\Pi = \{\lambda x + \mu y + \nu z + \rho = 0\},$$

es

$$(\frac{\mu}{m} - \frac{\nu}{n})\frac{x - x_a}{l} + (\frac{\nu}{n} - \frac{\lambda}{l})\frac{y - y_a}{m} + (\frac{\lambda}{l} - \frac{\mu}{m})\frac{z - z_a}{n} = 0.$$

5. Si $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ es la ecuación de dos planos que se intersectan con un ángulo de $\pi/3$, pruebe que

$$4(f^2 + g^2 + h^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) + 10(bc + ca + ab).$$

6. Muestre que la ecuación

$$a(z - x)(x - y) + b(x - y)(y - z) + c(y - z)(z - x) = 0,$$

representa a dos planos cuya recta de intersección está generada por $\vec{n} = (1, 1, 1)$.

7. Muestre que el volúmen del tetraedro formado por el origen y los tres puntos $A(x_a, y_a, z_a)$, $B(x_b, y_b, z_b)$ y $C(x_c, y_c, z_c)$ se puede calcular como

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

Nota: Argumente adecuadamente su respuesta; no serán tomadas en cuenta observaciones o señalamientos que realicen, sin su debida justificación.