①

MARTINEZ JIMENEZ MANUEL

(2) Prueba que los 2 círculos:

$C_1: x^2+y^2+z^2-2x+3y+4z+5=0 \qquad 5y+6z+1=0$

$C_2: x^2+y^2+z^2-3x-4y+5z-6=0 \qquad x+2y-7z=0$

están en la misma esfera y encuentra su ecuación

El haz de esferas que contiene al círculo C_1 es

$$x^2+y^2+z^2-2x+3y+4z+5+A(5y+6z+1)=0$$

El segundo haz de esferas que contiene a C_2 es

$$x^2+y^2+z^2-3x-4y+5z-6+B(x+2y-7z)=0$$

Una esfera común deberá ser igual a una de cada haz; es decir el sistema siguiente de ecuaciones debe tener solución:

En x: $-2=-3+B \qquad B=1$

En y: $3+5A=-4+2B \Rightarrow 5A-2B=-7$

En z: $4+6A=5-7B \qquad 6A+7B=1$

Resolviendo:

$B=1 \quad$ y $\quad A=-1 \quad \therefore C_1$ y C_2 están en la misma esfera

Sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones de ambo, obtengo la ecuación pedida

$$\boxed{S: x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0}$$

③ Encontrar la ecuación de la esfera cuyo centro es el punto $(1,2,3)$ y que toca el plano dado por la ecuación $3x+2y+z+4=0$

El radio de la esfera será la distancia del plano al centro de la esfera:

$$r = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

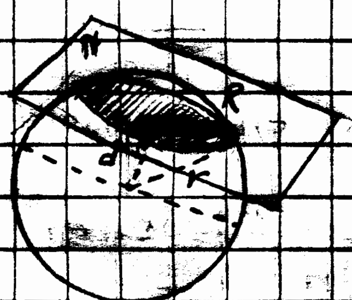
$$r = \frac{|3(1)+2(2)+1(3)+4|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}} = \frac{|3+4+3+4|}{\sqrt{9+4+1}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

Entonces la ecuación de la esfera es:

$$S: (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 14$$
$$S: x^2+y^2+z^2-2x-4z-6z=0$$

ECUACIÓN PEDIDA

Encontrar también el radio del círculo en el que la esfera es cortada por el plano $x+y+z=0$



De acuerdo a la figura el radio del círculo (R) es:

$$R^2 = r^2 - d^2 \Rightarrow R = \sqrt{r^2-d^2}$$

Donde d = DISTANCIA DEL CENTRO DE LA ESFERA AL PLANO

r = RADIO DE LA ESFERA =

CENTRO = $(1,2,3)$

$$d = \frac{|1+2+3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$r = \sqrt{14}$ (EJERCICIO ANTERIOR)

$$R = \sqrt{14-12} = \sqrt{2}$$

$\boxed{\text{RADIO} = \sqrt{2}}$

(5) Encontrar la ec. de la esfera con centro $(3, 0, 8)$ que corta una cuerda de 16 unidades sobre la línea

$$(2x + y - z = 7 \quad 4x - 4y - 5z = 29)$$

(1) Encuentro la ec. simétrica de la recta:

$x = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} y - z = 7 \\ -4y - 5z = 29 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} y = 2/3 \\ z = -19/3 \end{array}$

$y = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} 2x - z = 7 \\ 4x - 5z = 29 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ z = -5 \end{array}$

$\therefore$ LA RECTA PASA POR $(0, 2/3, -19/3)$, $(1, 0, -5)$

$\Rightarrow \mathcal{L}: P = (1, 0, -5) + t\left(1, -2/3, 4/3\right)$

$\therefore$ cosenos directores de $\mathcal{L}$ son

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + 4/9 + 16/9}} = \frac{1}{\sqrt{29/9}} = \frac{1}{\sqrt{29}/3} = \frac{3}{\sqrt{29}}$$

$$\mu = \frac{-2/3}{\sqrt{1 + 4/9 + 16/9}} = \frac{-2/3}{\sqrt{29/9}} = \frac{-2/3}{\sqrt{29}/3} = \frac{-2}{\sqrt{29}}$$

$$\nu = \frac{4/3}{\sqrt{1 + 4/9 + 16/9}} = \frac{4/3}{\sqrt{29/9}} = \frac{4/3}{\sqrt{29}/3} = \frac{4}{\sqrt{29}}$$

$$\therefore \quad \mathcal{L}: \frac{x - 1}{3/\sqrt{29}} = \frac{y}{-2/\sqrt{29}} = \frac{z + 5}{4/\sqrt{29}}$$

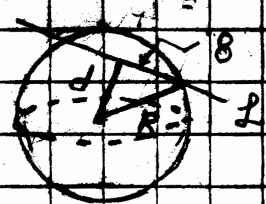
② Encuentro la distancia de L al punto centro de la esfera: $C=(3,0,8)$

$$d^2 = (3-1)^2 + 0 + (8+5)^2 - \left[3/\sqrt{29}\,(3-1) + 0 + 4/\sqrt{29}\,(8+5)\right]^2$$

$$d^2 = 4 + 0 + 169 - \left[6/\sqrt{29} + 52/\sqrt{29}\right]^2 = 173 - \left[58/\sqrt{29}\right]^2$$

$$d^2 = 173 - 3364/29 = 173 - 116 = 57$$

$$\therefore\ d(L, P_0) = \sqrt{57}$$



De acuerdo al esquema:

$$R = \sqrt{d^2 + 8^2} = \sqrt{57 + 64} = \sqrt{121}$$

$R = 11$ → RADIO DE LA ESFERA

ENTONCES LA EC. DE LA ESFERA ES:

$$(x-3)^2 + (y-0)^2 + (z-8)^2 = 11$$

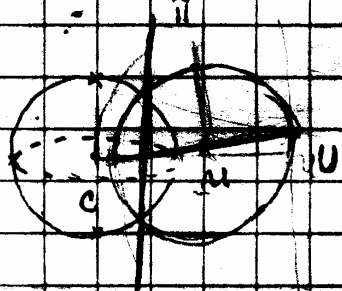
$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 16z + 62 = 10$$

7) Encontrar el plano en el que P siempre está. (P)

$x^2+y^2+z^2+2x-4y+1=0$ $\qquad U=(2,1,-3)$

$x^2+2x+1+y^2-4y+4+z^2+1 = 1+4 = 5$

$(x+1)^2 (y-2)^2+z^2=4$



Encuentro el plano que pasa por la intersección de las esferas

La 2ª esfera tiene centro

$x_c=\frac{-1+2}{2} \qquad y_c=\frac{1+2}{2} \qquad z_c=\frac{-3+0}{2}$

$x_c=\frac{1}{2} \qquad y_c=\frac{3}{2} \qquad z_c=-\frac{3}{2}$

CENTRO $=\left(1/2,\ 3/2,\ -3/2\right)$

RADIO $=\sqrt{(3/2)^2+(-1/2)^2+(-3/2)^2}=\sqrt{9/4+1/4+9/4}=\sqrt{\frac{19}{4}}$

La 2 esfera es

$(x-1/2)^2+(y-3/2)^2+(z+3/2)^2=19/4$

$x^2-x+y^2-3y+z^2+3z=0$

PARA OBTENER EL PLANO:

$x^2+y^2+z^2+2x-4y+1=0$

$-\ x^2+y^2+z^2-x-3y+3z=0$

$3x-y-2z=0$

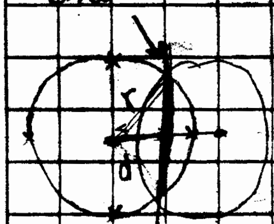
(9) - Encontrar el centro y el radio del círculo:

Encuentro el plano que pasa por la intersección de las esferas:

$$x^2+y^2+z^2-8x-10y-4z-15=0$$
$$-\left(x^2+y^2+z^2+2x+10y+6z+5=0\right)$$

$$\pi: -10x-20y-10z-20=0$$

círculo $\quad \pi: -x-2y-z-2=0$



Encuentro el centro del círculo

CENTRO DE LA ESFERA 1

$$x^2-8x+16+y^2-10y+25+z^2-4z+4=15+16+25+4$$
$$(x-4)^2+(y-5)^2+(z-2)^2=60$$

$L: (4,5,2)+t(-1,-2,-1) \Rightarrow x=4-t \quad z=2-t$
$y=5-2t$

SUSTITUYO EN EL PLANO:

$$-(4-t)-2(5-2t)-(2-t)-2=0 \qquad 6t=18$$
$$-4+t-10+4t-2+t-2=0 \qquad t=18/6=3$$
$$6t-18=0$$

CENTRO ES $(4,5,2)+3(-1,-2,-1)=\boxed{(1,-1,-1)}$

RADIO ES $=\sqrt{(\text{DIST } \pi \text{ al centro})^2-(\text{radio de la esfera})}$

$$d=\frac{|-1(4)-2(5)-1(2)-2|}{\sqrt{6}}=\frac{|-4-10-2-2|}{\sqrt{6}}=\frac{|-18|}{\sqrt{6}}=\frac{18}{\sqrt{6}}$$

$R=\sqrt{r_c^2-d^2}=\sqrt{60-\frac{324}{6}}=\sqrt{6}=$

$\boxed{\text{RADIO DELLA CIRCULO} = \sqrt{6}}$

⑤

⑨ Encontrar el centro y el radio de el círculo en el que las esferas

Intersectan y obtener la ecuación de la esfera en la que este círculo es máximo.

YA LO RESOLVI, ES EL ANTERIOR

(6)

(10) Una esfera pasa por los puntos $(4,3,-2)$ $(-1,-1,1)$ $(3,0,-2)$ $(2,3,2)$ Encuentra su ecuación.

Los 4 puntos deben satisfacer la ecuación general de la esfera $x^2+y^2+z^2+Gx+Hy+Iz+J=0$ resultando un sistema de 4 ecuaciones de 4 incógnitas

(1) $4^2+3^2+(-2)^2+G(4)+H(3)+I(-2)+J=0$

(2) $(-1)^2+(-1)^2+(1)^2+G(-1)+H(-1)+I(1)+J=0$

(3) $3^2+(-2)^2+G(3)+I(-2)+J=0$

(4) $2^2+3^2+2^2+G(2)+H(3)+I(2)+J=0$

$$
\begin{aligned}
4G+3H-2I+J&=-29\\
-G-H+I+J&=-3\\
3G-2I+J&=-13\\
2G+3H+2I+J&=-17
\end{aligned}
$$

Resolviendo el sistema; obtengo:

$G=2$ $H=-6$ $I=4$ $J=-11$

Entonces la ecuación pedida es:

$$
\begin{cases}
x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z-11=0\\
(x+1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=25
\end{cases}
$$

- Encontrar el centro y el radio de la sección de la esfera hecha por el plano $x+y=0$ y las ecuaciones de la proyección de esta sección sobre el plano $x=0$

Para encontrar el centro del círculo, encuentro la proyección ⊥ del centro de la esfera sobre el plano. Es decir el punto de intersección de la recta normal a π que pasa por el centro de la esfera

⊥: ortogonal

PROYECCIÓN DE $(-1,3,-2)$ SOBRE $\pi: x+y=0$

La recta normal a π que pasa por $P_0=(-1,3,-2)$ tiene la ecuación:

$$\mathcal{L}: P=(-1,3,-2)+t(1,-1,0)$$

$$x=-1+t$$

$$y=3-t,\quad z=-2$$

Sustituyo en π

$$(-1+t)-(3-t)=0 \Rightarrow -1+t-3+t=0 \Rightarrow 2t-4=0$$

$$\Rightarrow t=4/2 \Rightarrow t=2$$

Entonces el centro es: $(-1,3,-2)+2(1,-1,0)=(1,1,-2)$

$\boxed{(1,1,-2)}$ $\rightarrow$ centro del círculo

De acuerdo a la figura del problema el radio del círculo es: $R^2=r^2-d^2 \Rightarrow R=\sqrt{r^2-d^2}$

DONDE $d=$ DISTANCIA DEL CENTRO DE LA ESFERA AL PLANO

$r=$ RADIO DE LA ESFERA CENTRO $=(-1,3,-2$

$$d=\frac{|1(-1)-1(3)+0(-2)+0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}}=\frac{|-1-3|}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

$r=5$ (EJERCICIO ANTERIOR)

$$R=\sqrt{(5)^2-\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{25-\frac{16}{2}}=\sqrt{25-8}=\sqrt{17}$$

$$\boxed{R=\sqrt{17}}$$

(12) Encontrar la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $(1,-2,0)$, $(0,-2,-1)$, $(1,-1,-1)$, $(1,-3,-1)$ y muestra que el plano $x+y-z=0$ pasa por el centro de la esfera.

Los 4 puntos satisfacen la ec. general de la esfera $x^2+y^2+z^2+Gx+Hy+Iz+J=0$; el sist. de ec. es el sig:

① $1^2+(-2)^2+G(1)+H(-2)+I(0)+J=0$

② $(-2)^2+(-1)^2+G(0)+H(-2)+I(-1)+J=0$

③ $1^2+(-1)^2+(-1)^2+G(1)+H(-1)+I(-1)+J=0$

④ $1^2+(-3)^2+(-1)^2+G(1)+H(-3)+I(-1)+J=0$

$$G-2H+0I+J=-5$$
$$0G-2H-I+J=-5$$
$$G-H-I+J=-3$$
$$G-3H-I+J=-11$$

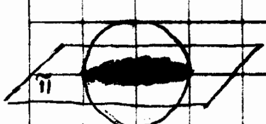
Resolviendo el sistema obtengo:

$G=-2 \quad H=4 \quad I=2 \quad J=5$

La ecuación pedida es:

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z+5=0$$
$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=1$$

Si el plano $\pi: x+y-z=0$ pasa por el centro de la esfera entonces la distancia del plano al centro de la esfera es 0



$$d=\frac{|Ax_1+By_2+Cz_2+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1(1)+1(-2)-1(-1)+0|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$$

CENTRO ES:
$(1,-2,-1)$

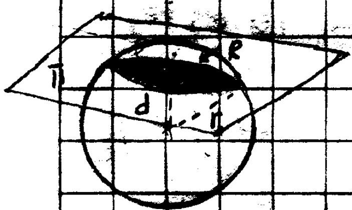
$$d=\frac{|1-2+1|}{\sqrt{3}}=\frac{0}{\sqrt{3}}=0$$

$\therefore$ $\pi: x+y-z=0$ PASA POR EL CENTRO DE LA ESFERA

$$r^2 = R^2 + d^2$$

Demuestra que el plano $x+2y-z=4$ corta a la esfera $x^2+y^2+z^2-x+z-2=0$ en un círculo de radio 1 y encuentra la ecuación de la esfera que tiene este círculo como uno de sus máximos.

ENCUENTRO EL CENTRO DEL CÍRCULO



$$\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+(y-0)^2+\left(z+\tfrac{1}{2}\right)^2 = 2+\tfrac{2}{4} = \tfrac{10}{4} = \tfrac{5}{2}$$

CENTRO ESFERA: $\left(+\tfrac{1}{2}, 0, -\tfrac{1}{2}\right)$

CENTRO (CÍRCULO)

$\mathcal{L}: P = \left(+\tfrac{1}{2}, 0, -\tfrac{1}{2}\right) + t(1, 2, -1)$

$\mathcal{L}: x = +\tfrac{1}{2}+t \qquad z = -\tfrac{1}{2}-t$

$y = 2t$

Sostituyo en π

$\left(+\tfrac{1}{2}+t\right)+2(2t)-\left(-\tfrac{1}{2}-t\right)-4=0 \rightarrow 6t = 3$

$t+4t+t+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}-4=0 \qquad t = \tfrac{1}{2}$

$6t-3=0$

$\left(-\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{3}(1,2,-1) = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{5}{3}, -\tfrac{1}{3}\right)$

$\boxed{\text{CENTRO} = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{5}{3}, -\tfrac{1}{3}\right)}$ [redacted] Clear

DISTANCIA DE π AL CENTRO DE LA ESFERA

$$d = \frac{\left|1\left(+\tfrac{1}{2}\right)+2(0)-1\left(-\tfrac{1}{2}\right)-4\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{\left|+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}-4\right|}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

RADIO DE LA ESFERA: $\rightarrow$ RADIO = 1

$$R = \sqrt{r^2-d^2} = \sqrt{\tfrac{5}{2}-\tfrac{9}{6}} = \sqrt{1} = 1. \quad \therefore \text{q.e.d.}$$

(14) Los puntos A, B, C, D ~~tienen~~ coordenadas (3,5,2) (1,3,0) (3,4,1) (-1,6,-1). Encontrar los puntos donde la recta CD corta a la esfera con AB como diámetro.

① Obtengo la ecuación de la esfera

CENTRO es el punto medio del segmento AB

$x_c = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$; $y_c = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$; $z_c = \frac{2+0}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$C = (2, 4, 1)$

RADIO es la distancia de C a A ó d(CB)

$R = \sqrt{(2-3)^2 + (4-5)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

LA ECUACION PEDIDA ES ENTONCES:

$(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 3$ ó bien

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - z + 18 = 0$

② obtengo la ec. de la recta

VECTOR DIRECCION

$(3,4,1) - (-1,6,-1) = (4,-2,2)$

ECUACION DE LA RECTA:

$P = (3,4,1) + t(4,-2,2)$

EN PARAMETRICAS:

$x = 3 + 4t$ $\quad z = 1 + 2t$

$y = 4 - 2t$

PARA OBTENER LAS INTERSECCIONES: SUSTITUYO EN LA ESFERA

$(3+4t)^2 + (4-2t)^2 + (1+2t)^2 - 2(3+4t) - 4(4-2t) - (1+2t) + 18 = 0$

$16t^2 + 4t^2 + 4t^2 + 24t - 16t + 4t - 8t + 8t - 2t + 9 + \cancel{16} + \cancel{1} - 6 - \cancel{16} - \cancel{1} + 18 = 0$

$24t^2 + 10t + 21 = 0$ ← RESUELVO ESTA ECUACIÓN.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$24t^2 + 10t + 21 = 0$; $\Delta = 10^2 - 4(24)(21) = 100 - 2016 = -1916$

EL DISCRIMINANTE ES < 0 $\therefore$ LA RECTA CD NO CORTA EN NINGUN PUNTO A LA ESFERA DADA.

$\ell \cap S = \emptyset$