Geometría Analítica 2
Mendoza Luna Luis Guillermo

(2) Prueba que los dos círculos

$$S_1 \equiv x^2+y^2+z^2-2x+3y+4z-5=0, \quad \Pi_1 \equiv 5y+6z+1=0$$

$$y \quad S_2 \equiv x^2+y^2+z^2-3x-4y+5z-6=0, \quad \Pi_2 \equiv x+2y-7z=0.$$

yacen en la misma esfera y encuentra su ecuación.

Primero encontraremos la ecuación de la esfera $S=0$ y después probaremos que ambos círculos viven en $S=0$.

La familia de esferas que contienen al círculo $S_1 \cap \Pi_1$ es $S_1 - k\Pi_1 = 0$ con $k \in \mathbb{R}$ un parámetro por determinar:

$$x^2+y^2+z^2-2x+3y+4z-5-k(5y+6z+1)=0$$

Encontraremos un punto de $S_2 \cap \Pi_2$ poniendo $x=0$, por la ecuación de Π_2: $y=\frac{7z}{2}$; sustituyendo esta información en la ecuación de S_2 y resolviendo para el valor positivo de z:

$$\left(\frac{7z}{2}\right)^2+z^2-4\left(\frac{7z}{2}\right)+5z-6=0$$

$$\Rightarrow z=\frac{18}{53}+\frac{2}{53}\sqrt{399} \quad \therefore \; y=\frac{63}{53}+\frac{7}{53}\sqrt{399}$$

Si metemos esta información en la ecuación $S_1-k\Pi_1=0$ encontraremos el valor de k para el cual la esfera que estamos construyendo pasa por el punto encontrado. Hagámoslo:

$$\left(\frac{63}{53}+\frac{7}{53}\sqrt{399}\right)^2+\left(\frac{18}{53}+\frac{2}{53}\sqrt{399}\right)^2-2(0)+3\left(\frac{63}{53}+\frac{7}{53}\sqrt{399}\right)+4\left(\frac{18}{53}+\frac{2}{53}\sqrt{399}\right)-k\left[5\left(\frac{63}{53}+\frac{7}{53}\sqrt{399}\right)\right.$$

$$\left.+6\left(\frac{18}{53}+\frac{2}{53}\sqrt{399}\right)+1\right]-5=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{53^2}\left(3969+882\sqrt{399}+19551\right)+\frac{1}{53^2}\left(324+72\sqrt{399}+1596\right)+3\left(\frac{63}{53}+\frac{7}{53}\sqrt{399}\right)+\frac{4}{53}\left(18+2\sqrt{399}\right)$$

$$-5-k\left[5\left(\frac{63}{53}+\frac{7}{53}\sqrt{399}\right)+\frac{6}{53}\left(18+2\sqrt{399}\right)+1\right]=0$$

$\Longleftrightarrow \left(882\sqrt{399}+23520\right)+\left(1920+72\sqrt{399}\right)+159\left(63+7\sqrt{399}\right)+212\left(18+2\sqrt{399}\right)$

$-14045-k\left[265\left(63+7\sqrt{399}\right)+318\left(18+2\sqrt{399}\right)+2809\right]=0$

$\Longleftrightarrow 25228+2491\sqrt{399}-k\left(25228+2491\sqrt{399}\right)=0$

$\Longleftrightarrow k=1$

$\therefore$ La ecuación de la esfera es $S\equiv x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$

Basta probar que $S_1\cap\Pi_1\subseteq S$ y $S_2\cap\Pi_2\subseteq S$; pero $S_1\cap\Pi_1\subseteq S$ por construcción, ya que construimos a S considerando todas las esferas que incluyen al círculo $S_1\cap\Pi_1$; probaremos la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN. Sobre Π_2, un punto P pertenece a S_2 si y sólo si pertenece a S.

DEMOSTRACIÓN

Sea $(x,y,z)\in\Pi_2$. Esto equivale a $x+2y-7z=0$. Supongamos $(x,y,z)\in S_2$. Esto ocurre si y sólo si

$$x^2+y^2+z^2-3x-4y+5z+6=0$$

$$\Longleftrightarrow x^2+y^2+z^2-3x-4y+5z\,6+0=0$$

$$\Longleftrightarrow x^2+y^2+z^2-3x-4y+5z-6+(x+2y-7z)=0$$

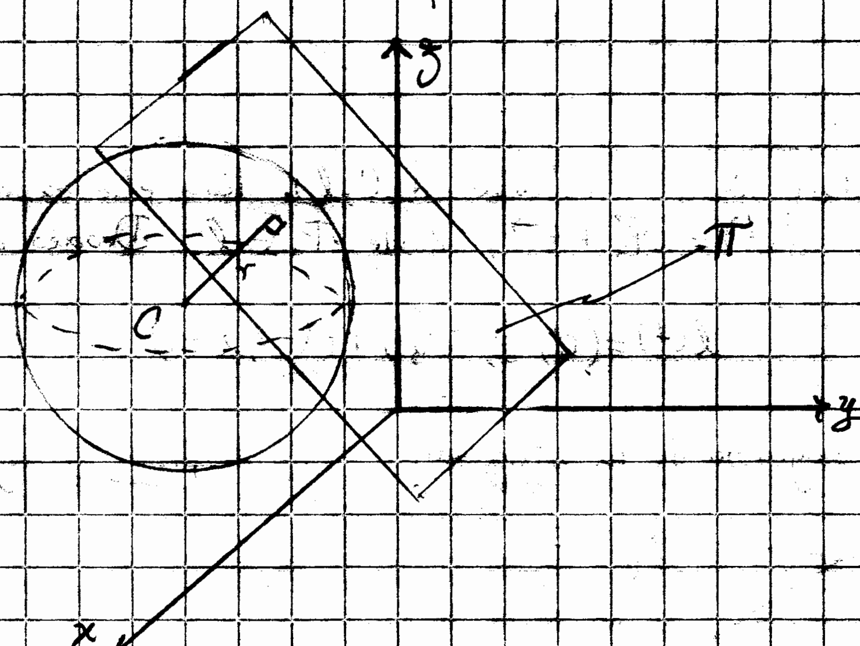
$$\Longleftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$$

Y como esta es precisamente la ecuación $S=0$, tenemos $(x,y,z)\in S$.

$\therefore S_2\cap\Pi_2\subseteq S$, justo como queríamos

3. Encuentra la ecuación de la esfera cuyo centro es el punto $(1,2,3)$ y que toca al plano descrito por la ecuación $3x+2y+z+4=0$.

Como conocemos el centro de la esfera, solamente hace falta investigar su radio. Se nos dice, además, que el plano dado es tangente a la esfera, y como todos los radios son perpendiculares a los planos tangentes de una esfera, entonces el radio es la distancia del centro de la esfera al plano dado.



$$r = d((1,2,3),\pi) = \frac{|3\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3 + 4|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \sqrt{14}$$

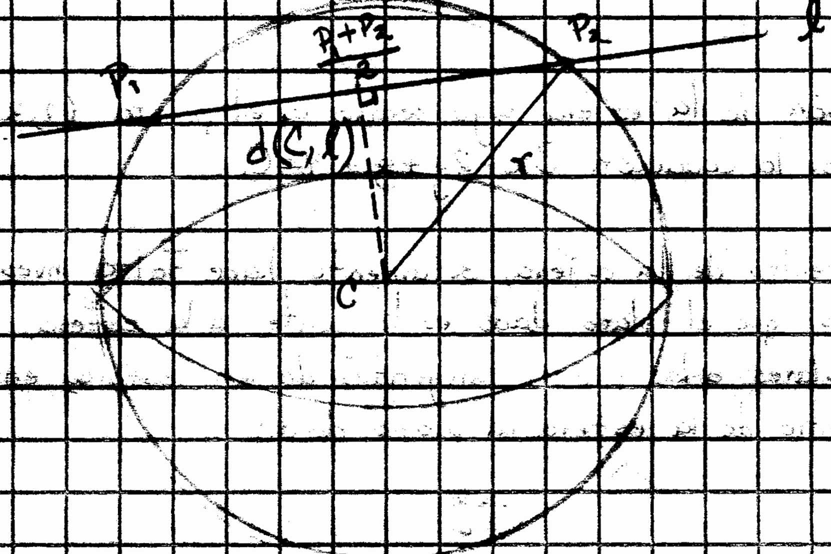
Entonces, la ecuación buscada es $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$.

5. Encuentra la ecuación de la esfera con centro en $(3,0,8)$ que genera una cuerda de longitud 16 sobre la línea $2x+y-z=7$, $4x-4y-5z+29=0$.

Por hipótesis, existen P_1 y P_2 tales que $P_i = \ell \cap S$ $(i=1,2)$. Por otro lado, todas las demás cuerdas de S que tienen la misma dirección que ℓ forman un plano (si únicamente tomamos el punto medio de cada una de ellas y el vector director de la recta como vector normal del plano). Este plano es bisectado por el centro de la esfera.

Por lo tanto, el segmento que une el centro de S con el punto medio de la cuerda es perpendicular a dicha cuerda y su medida es $d(C,\ell)$ (C es el centro de S).

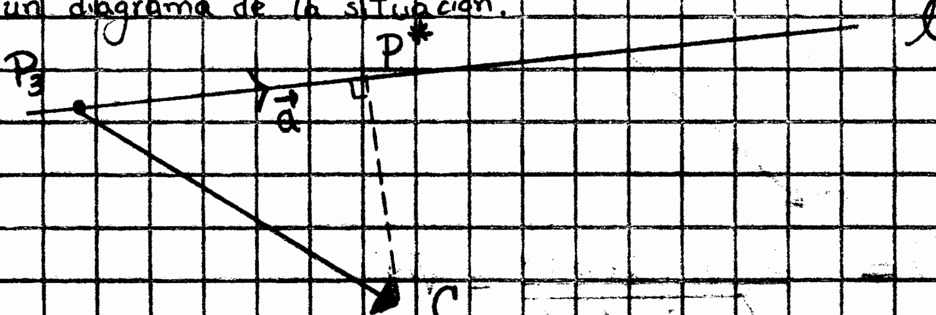
Una vez calculado $d(C,\ell)$ podremos encontrar r con ayuda del Teorema de Pitágoras:



El problema se reduce ahora a calcular $d(C,\ell)$. Para ello expresaremos ℓ en su forma paramétrica $\ell(t) = \overrightarrow{OP_3} + t\vec{a}$, donde $P_3 \in \ell$. Después de hacer los cálculos:

$$\ell(t) = \left(0, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{19}{3}\right) + t(-3, 2, -4)$$

El siguiente es un diagrama de la situación:



Sea P^* la proyección ortogonal de P_3C sobre ℓ, y sea $\vec{\eta} = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$ un vector unitario paralelo a ℓ. Entonces

$$\overrightarrow{P_3P^*} = \left(\text{proy}_{\vec{\eta}}\, \overrightarrow{P_3C}\right)\vec{\eta} = \left(\overrightarrow{P_3C} \cdot \vec{\eta}\right)\vec{\eta}, \text{ y además } \overrightarrow{OP^*} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}\right).$$

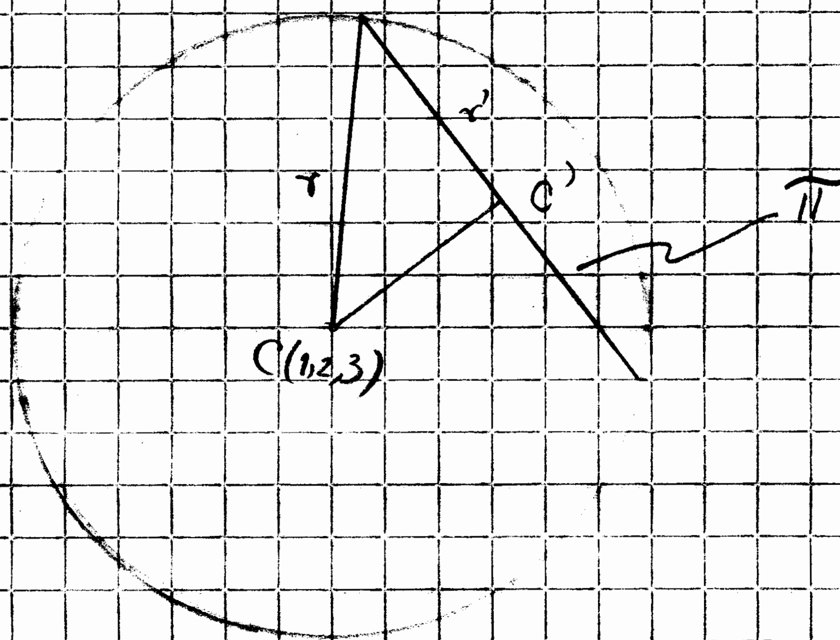
En nuestro caso $\overrightarrow{P_3C} = \left(3, -\frac{2}{3}, \frac{43}{3}\right)$, por lo que $\overrightarrow{P_3P^*} = -\frac{7}{3}(-3, 2, -4)$. Con esto hemos localizado P^*. El vector que nos interesa es $\overrightarrow{P^*C}$, el cual podemos calcular gracias a la identidad $\overrightarrow{P^*C} = \overrightarrow{P^*P_3} + \overrightarrow{P_3C}$, de lo cual se sigue que

$$\overrightarrow{P^*C} = (-4, 4, 5)$$

Entonces, $d(C,\ell)^2 = |P^*C|^2 = 57$. Por el Teorema de Pitágoras, $r^2 = 64 + 57 = 121$

Finalmente, la ecuación es $(x-3)^2 + y^2 + (z-8)^2 = 121$

③ (Segunda parte). Encuentra también el radio del círculo en que el plano $x+y+z=0$ corta la esfera



Sea $\pi \equiv x+y+z=0$, r' el radio del círculo buscado, el cual encontraremos con el Teorema de Pitágoras una vez encontrada $d(C,\pi)$.

$$d(C,\pi) = \frac{1+2+3}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

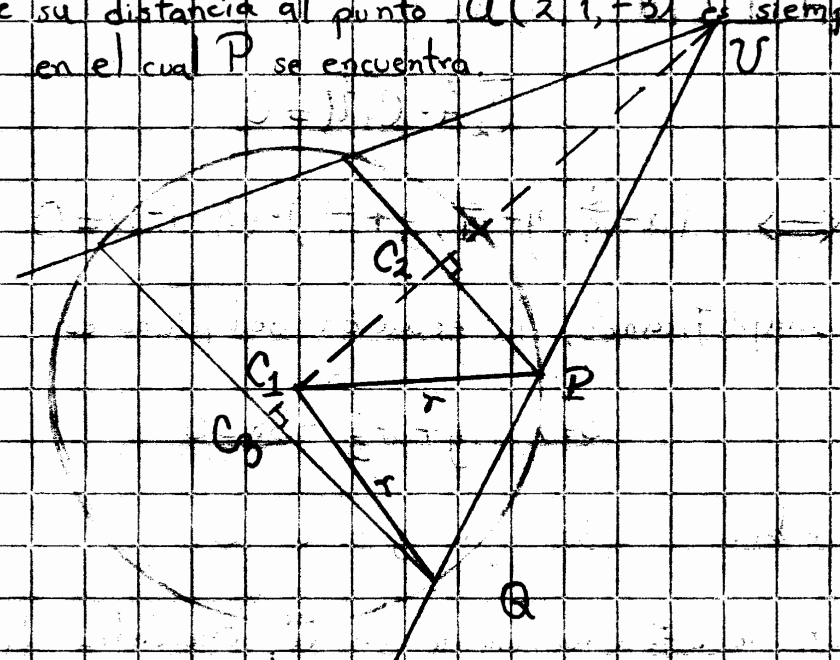
y como $r=\sqrt{14}$, $(r')^2 = 14-12 = 2 \implies \underline{r' = \sqrt{2}}$.

Como conocemos la ecuación del plano, conocemos un vector normal a él, y si lo hacemos unitario: $\vec{\eta} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, obtendremos $\vec{CC'} = d(C,\pi)\,\vec{\eta} = (-2,-2,-2)$.
En virtud de la identidad $\vec{OC'} = \vec{OC} + \vec{CC'}$, tenemos

$$\vec{OC} = (1,2,3)+(-2,-2,-2) = (-1,0,1)$$

Entonces, el centro del círculo tiene coordenadas $(-1,0,1)$.

7. Un punto P se mueve sobre la superficie de la esfera $x^2+y^2+z^2+2x-4y+1=0$ de tal manera que su distancia al punto $U(2,1,-3)$ es siempre 3. Encuentra la ecuación del plano en el cual P se encuentra.



Los puntos P descritos se mueven de tal manera que generan una circunferencia con centro en C_2, donde C_2 es la proyección ortogonal de U sobre el plano buscado Π. Por otro lado, $C_1C_2 \perp \Pi$ ya que $\overrightarrow{C_1U} \perp \Pi$. Entonces, C_1, C_2 y U son colineales. Por lo tanto, un vector normal del plano es $\overrightarrow{C_1U}=(3,-1,-3)$, puesto que $\overrightarrow{OC_1}=(-1,2,0)$ en virtud de que la ecuación de la esfera es $(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=4$.

Por la fórmula de la distancia entre dos puntos, $d(C_1,U)=\sqrt{19}$; por hipótesis, $d(U,P)=3$, $r=2$. Aplicando dos veces el Teorema de Pitágoras:

$$d(P,U)^2 = d(U,C_2)^2 + d(C_2,P)^2$$

$$d(C_1,C_2)^2 + d(C_2,P)^2 = r^2$$

Por otro lado, en virtud de la colinealidad, $d(U,C_1) = d(U,C_2) + d(C_1,C_2)$. Resolviendo las ecuaciones anteriores para $d(C_1,C_2)$:

$$d(C_1,C_2) = \frac{r^2 + d(U,C_1)^2 - d(P,U)^2}{2\,d(U,C_1)}$$

Entonces, $d(C_1,C_2) = 7/\sqrt{19}$. Sea $\vec{\eta}$ un vector unitario codirigido con $\overrightarrow{C_1U}$: $\vec{\eta} := \overrightarrow{C_1U} / |\overrightarrow{C_1U}| = \frac{1}{\sqrt{19}}(3,-1,-3)$. Entonces, $\overrightarrow{C_1C_2} = d(C_1,C_2)\,\vec{\eta} = 7/19\,(3,-1,-3)$, y en virtud de la identidad $\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1C_2}$:

$$\overrightarrow{OC_2} = \left(\frac{2}{19}, \frac{31}{19}, -\frac{21}{19}\right)$$

Sea A cualquier punto del plano, donde $\vec{OA}=(x,y,z)$. La condición que define el plano es $\vec{C_2A} \perp \vec{C_1U}$, es decir:

$$\vec{C_2A}\cdot\vec{C_1U}=0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(x-\frac{2}{19},\, y-\frac{3}{19},\, z+\frac{21}{9}\right)\cdot(3,-1,-3)=0$$

Desarrollando y simplificando, la ecuación del plano es

$$57x-19y-57z-38=0$$

o bien $$3x-y-3z-2=0.$$

La línea UP corta la esfera nuevamente en Q. Encuentra la ecuación del plano en que se encuentra Q y la distancia entre ambos planos.

Si trazamos por Q una paralela a la recta $\overleftrightarrow{C_2P}$ y designamos por C_3 el punto en que esta nueva recta corta la recta $\overleftrightarrow{C_1U}$, veremos que ΔUPC_2 es semejante a ΔUQC_3 por el Teorema de Thales.

En la primera parte del ejercicio anterior localizamos C_2, por lo cual $d(U,C_2)= \frac{12}{\sqrt{19}}$, o bien, del hecho antes mencionado de que $d(C_1,C_2)+d(C_2,U)=d(U,C_1)$. Con el Teorema de Pitágoras encontramos $d(C_2,P)=\sqrt{27/19}$

En virtud de la semejanza de triángulos mencionada:

$$\frac{d(U,C_2)}{d(U,C_1)+d(C_1,C_3)}=\frac{d(C_2,P)}{d(C_3,Q)}$$

Como $Q\in S$, podemos escribir, por el Teorema de Pitágoras:

$$d(Q,C_3)^2+d(C_1,C_3)^2=r^2$$

Resolviendo numéricamente las dos ecuaciones, $d(C_1,C_3)=1/\sqrt{19}$, $d(Q,C_3)=5\sqrt{3/19}$

Como C_2 y C_3 se encuentran en lados opuestos de la recta $\overleftrightarrow{C_1U}$, $\vec{C_1C_3}=-\vec{\eta}\, d(C_1,C_3)$ $=-\frac{1}{19}(3,-1,-3)$. Entonces, $\vec{OC_3}=\vec{OC_1}+\vec{C_1C_3}=\left(-\frac{22}{19},\frac{39}{19},\frac{3}{19}\right)$.

Finalmente, la ecuación del plano buscado viene dada por la condición

$$\overrightarrow{C_3A} \cdot \overrightarrow{C_1U} = 0$$

donde A es ahora un punto de este plano. Esto produce la condición

$$\left(x+\frac{22}{19},\, y-\frac{39}{19},\, z-\frac{3}{19}\right)\cdot(3,-1,-3)=0$$

y simplificando y reduciendo, la ecuación del plano es $3x-y-3z+6=0$.

La distancia entre ambos planos es $d(C_3,C_2)=d(C_3,C_1)+d(C_1,C_2)=\frac{7}{\sqrt{19}}+\frac{1}{\sqrt{19}}$
$=8/\sqrt{19}$

9 Encuentra el centro y el radio del círculo en el que las esferas

$$S_1 \equiv x^2+y^2+z^2-8x-10y-4z-15=0$$

$$S_2 \equiv x^2+y^2+z^2+2x+10y+6z+5=0$$

se cortan, y obtén la ecuación de la esfera en la cual este círculo es un gran círculo.

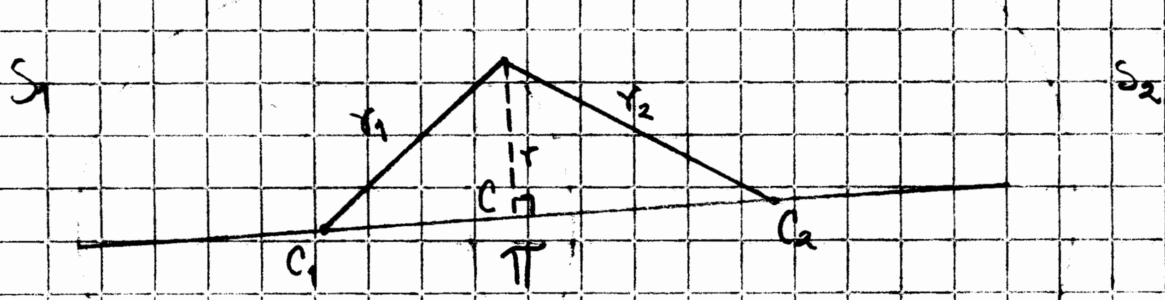
Podemos reescribir a nuestras esferas como

$$S_1 \equiv (x-4)^2+(y-5)^2+(z-2)^2-60=0$$

$$S_2 \equiv (x+1)^2+(y+5)^2+(z+3)^2-30=0.$$

Sabemos que cuando dos esferas se cruzan, su intersección se encuentra sobre su plano radical Π. En nuestro caso:

$$\Pi \equiv x+2y+z+2=0.$$



Podremos obtener el radio r de nuestro círculo con el Teorema de Pitágoras calculando $d(C_1,\Pi)$ o $d(C_2,\Pi)$. Tenemos

$$d(C_1,\Pi)=\frac{4+2(5)+2+2}{\sqrt{1^2+2^2+1}}=\frac{18}{\sqrt{6}}$$

$$\therefore\ r^2=60-\frac{18^2}{6}=6 \qquad \therefore\ r=\sqrt{6}$$

Para localizar el centro C de nuestro círculo, sea $\vec{n}$ un vector unitario paralelo y con la misma orientación que $\overrightarrow{C_1C_2}$, es decir, $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-2,-1)$. Entonces, $\overrightarrow{C_1C} = d(C_1, \Pi)\,\vec{n} = 3(-1,-2,-1)$.

Finalmente, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1C} = (1,-1,-1)$ es el centro del círculo.

Para que una esfera tenga al círculo descrito como un gran círculo se necesita que tenga el mismo centro y el mismo radio que el círculo. Entonces, la ecuación requerida es

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 6.$$

10. Una esfera pasa por los puntos $(4,3,-2)$, $(-1,-1,1)$, $(3,0,-2)$, $(2,3,2)$. Encuentra su ecuación.

Como cuatro puntos no coplanares determinan una esfera, podemos encontrar la ecuación de la esfera con centro en (x_c, y_c, z_c) y radio r. Lo haremos resolviendo las siguientes cuatro ecuaciones simultáneas para nuestras cuatro incógnitas:

$$(x_c-4)^2+(y_c-3)^2+(z_c+2)^2=r^2$$

$$(x_c+1)^2+(y_c+1)^2+(z_c-1)^2=r^2$$

$$(x_c-3)^2+y_c^2+(z_c+2)^2=r^2$$

$$(x_c-2)^2+(y_c-3)^2+(z_c-2)^2=r^2$$

o bien

$$\begin{aligned}
x_c^2+y_c^2+z_c^2-8x_c-6y_c+4z_c+29&=r^2\\
x_c^2+y_c^2+z_c^2+2x_c+2y_c-2z_c+3&=r^2\\
x_c^2+y_c^2+z_c^2-6x_c\qquad+4z_c+13&=r^2\\
x_c^2+y_c^2+z_c^2-4x_c-6y_c-4z_c+17&=r^2
\end{aligned}$$

Eliminando los términos cuadráticos obtenemos las siguientes ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}
5x_c+4y_c-3z_c&=13\\
4x_c+y_c-3z_c&=5\\
-x_c+3y_c+4z_c&=2
\end{aligned}$$

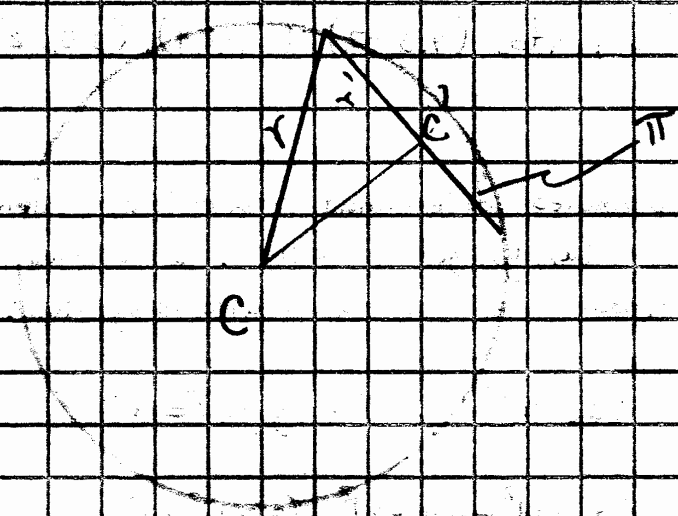
Resolviendo este sistema encontramos $x_c=-1$, $y_c=3$, $z_c=-2$. Por otro lado, $r^2=25$. Entonces la ecuación es

$$(x+1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=25$$

Encuentra el centro y el radio de la sección de la esfera por el plano $x-y=0$ y las ecuaciones de la proyección de esta sección sobre el plano $x=0$.

Calculemos $d(C,\pi)$, donde π es el plano dado.

$$d(C,\pi)=\frac{|-1-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}$$



Encontraremos r' con el Teorema de Pitágoras: $(r')^2 = r^2 - d^2(C,\pi) = 17$. Un vector unitario normal a Π es $\vec{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$. Entonces, $\overrightarrow{CP} = d(C,\pi)\,\vec{\eta} = 2(1,-1,0)$.
Pero $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = (-1,3,-2) + 2(1,-1,0) = (1,1,-2)$.

En conclusión, el radio del círculo es $r' = \sqrt{17}$ y su centro es $(1,1,-2)$.

Para proyectar nuestro círculo sobre el plano YZ encontraremos la ecuación del cilindro proyectante de la curva sobre el plano dado $(x=0)$; la ecuación de dicho cilindro es independiente de x ya que sus líneas generadoras son paralelas al eje X. Obtendremos, entonces, la ecuación del cilindro eliminando x de las ecuaciones que definen la curva:

Desarrollando la ecuación de la esfera obtenemos $x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z-11=0$; como $x=y$, la ecuación de la esfera se transforma en $2y^2+z^2-4y+4z-11=0$.

$\therefore$ Las ecuaciones de la proyección son

$$x=0,$$

$$2y^2+z^2-4y+4z-11=0,$$

que definen una elipse sobre el plano YZ.

12. Encuentra la ecuación de la esfera que pasa por $(1,-2,0)$, $(0,-2,-1)$, $(1,-1,-1)$ y $(1,-3,-1)$ y muestra que el plano $x+y-z=0$ pasa por el centro de la esfera.

Nuevamente planteamos el sistema

$$(x_c-1)^2+(y_c+2)^2+z_c^2=r^2$$

$$x_c^2+(y_c+2)^2+(z_c+1)^2=r^2$$

$$(x_c-1)^2+(y_c+1)^2+(z_c+1)^2=r^2$$

$$(x_c-1)^2+(y_c+3)^2+(1+z_c)^2=r^2$$

que desarrollado es

$$\begin{aligned}
x_c^2+y_c^2+z_c^2-2x_c+4y_c+5&=r^2\\
x_c^2+y_c^2+z_c^2+4y_c+2z_c+5&=r^2\\
x_c^2+y_c^2+z_c^2-2x_c+2y_c+2z_c+3&=r^2\\
x_c^2+y_c^2+z_c^2-2x_c+6y_c+2z_c+11&=r^2.
\end{aligned}$$

Eliminando los términos cuadráticos obtenemos

$$\begin{aligned}
-2x_c-2z_c&=0\\
2x_c+2y_c+2&=0\\
-4y_c-8&=0
\end{aligned}$$

$\therefore$ $x_c=1$, $y_c=-2$, $z_c=-1$.

Ahora, como $x_c+y_c-z_c=1-2+1=0$, $P_c\in\Pi$.

14 Los puntos A, B, C, D tienen coordenadas $(3,5,2)$, $(1,3,0)$, $(3,4,1)$, $(-1,6,-1)$, respectivamente. Encuentra los puntos en que la recta $\overleftrightarrow{CD}$ corta la esfera que tiene a AB como diámetro.

La forma paramétrica vectorial de la recta es $\ell(t) = \overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{CD}$, y la esfera que tiene a AB como diámetro es $(\bar{x} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\bar{x} - \overrightarrow{OB}) = 0$. En el primer caso,

$$\ell(t) = (3,4,1) + t(-4,2,-2)$$

Desarrollando la condición que define la esfera:

$$\big((x,y,z) - (3,5,2)\big) \cdot \big((x,y,z) - (1,3,0)\big) = 0$$

$$\iff (x-3)(x-1) + (y-5)(y-3) + (z-2)z = 0$$

$$\iff x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 2z + 18 = 0.$$

Para encontrar los puntos P tales que $P = \ell \cap S$, sustituimos las coordenadas de ℓ en la ecuación de S y resolvemos para t.

$$(3-4t)^2 + (4+2t)^2 + (1-2t)^2 - 4(3-4t) - 8(4+2t) - 2(1-2t) + 18 = 0$$

$$\iff 12t^2 - 4t - 1 = 0 \implies t = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 12}}{24} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{24} = \frac{4 \pm 8}{24} = \frac{1}{6} \pm \frac{1}{3}$$

$$\implies t_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}, \quad t_2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}.$$

Los puntos buscados son, entonces,

$$\ell(t_1) = (3,4,1) + \tfrac{1}{2}(-4,2,-2) = (3,4,1) + (-2,1,-1) = (1,5,0)$$

$$\ell(t_2) = (3,4,1) - \tfrac{1}{6}(-4,2,-2) = (3,4,1) + \left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right) = \left(\tfrac{11}{3}, \tfrac{11}{3}, \tfrac{4}{3}\right).$$

(15). Demuestra que las esferas

$$S_1 \equiv x^2+y^2+z^2-2x-2z-2=0$$

$$S_2 \equiv x^2+y^2+z^2-8x-4y-2z+20=0$$

no se cortan.

Escribamos
$$S_1 \equiv (x-1)^2+y^2+(z-1)^2-4=0$$

$$S_2 \equiv (x-4)^2+(y-2)^2+(z-1)^2-1=0.$$

Si existiera una intersección entre S_1 y S_2, ésta debería encontrarse en el plano radical

$$\Pi \equiv 3x+2y-11=0;$$

entonces, basta probar que $d(C_1,\Pi)>r_1$, $d(C_2,\Pi)>r_2$, donde C_1 y C_2 son los centros de S_1 y S_2, respectivamente. Tenemos:

$$d(C_1,\Pi)=\frac{|3\cdot 1+2\cdot 0-11|}{\sqrt{13}}=\frac{8}{\sqrt{13}}$$

y como $8/\sqrt{13}>2=r_1$, $S_1\cap\Pi=\phi$.

Por otro lado, $d(C_2,\Pi)=\dfrac{|3(4)+2(2)-11|}{\sqrt{13}}=\dfrac{5}{\sqrt{13}}$, y en virtud de que $5/\sqrt{13}>1$,

$S_2\cap\Pi=\phi$.

$\therefore S_1\cap S_2=\phi$.

Obtén condiciones para que el plano $lx+my+nz-d=0$ $(l^2+m^2+n^2=1)$ toque ambas esferas. Deduce que todos estos planos pasan por uno u otro de dos puntos fijos colineales con los centros de las esferas, y encuentra las coordenadas de esos puntos.

Para que el plano $\Pi\equiv lx+my+nz-d=0$ toque ambas esferas (ie sea tangente a ellas) se necesita que $d(C_1,\Pi)=r_1$, $d(C_2,\Pi)=r_2$, lo cual es

$$l+n-d=2$$

$$4l+2m+n-d=1.$$

(16) Encuentra la ecuación de la esfera que pasa por el origen, $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$

Para empezar, $abc \neq 0$, ya que de lo contrario solamente tendríamos 3 puntos, los cuales no determinan una esfera. Buscamos un punto C' que satisfaga:

$$x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 = r^2$$
$$x_c^2 - 2x_c a + a^2 + y_c^2 + z_c^2 = r^2$$
$$x_c^2 + y_c^2 - 2y_c b + b^2 + z_c^2 = r^2$$
$$x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 - 2z_c c + c^2 = r^2$$

Eliminando los términos cuadráticos de estas ecuaciones obtenemos:

$$a^2 - a(2x_c) = 0$$
$$b^2 - 2y_c b = 0$$
$$c^2 - 2z_c c = 0$$

$\therefore$ $x_c = a/2$, $y_c = b/2$, $z_c = c/2$, pues ya vimos que a, b y c son $\neq 0$. Ahora, en virtud de la primera ecuación:

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}.$$

$\therefore$ La ecuación requerida es

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$$

(19) Los puntos A, B, C, D tienen coordenadas $(5,-3,2)$, $(6,-2,2)$, $(5,-2,3)$, $(6,-3,3)$, respectivamente. Demuestra que existen esferas con centros en esos puntos tales que cada esfera corta a las otras tres externamente.

Podemos escribir a nuestras esferas como

$$S_A \equiv (x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 - r_A^2 = 0$$
$$S_B \equiv (x-6)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 - r_B^2 = 0$$
$$S_C \equiv (x-5)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 - r_C^2 = 0$$
$$S_D \equiv (x-6)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 - r_D^2 = 0,$$

o bien, como

$$S_A \equiv x^2+y^2+z^2-10x+6y-4z+38-r_a^2=0$$
$$S_B \equiv x^2+y^2+z^2-12x+4y-4z+44-r_B^2=0$$
$$S_C \equiv x^2+y^2+z^2-10x+4y-6z+38-r_c^2=0$$
$$S_D \equiv x^2+y^2+z^2-12x+6y-6z+54-r_D^2=0$$

Obtendremos ahora las ecuaciones de los 6 planos radicales de cada pareja de esferas:

$$\Pi_{A,B} \equiv 2x+2y-6-r_a^2+r_B^2=0$$

$$\Pi_{B,C} \equiv 2x-2z-6-r_c^2+r_B^2=0$$

$$\Pi_{C,D} \equiv 2x-2y+16-r_c^2+r_D^2=0$$

$$\Pi_{A,C} \equiv 2y+2z-r_a^2+r_c^2=0$$

$$\Pi_{A,D} \equiv 2x+2z-16-r_a^2+r_D^2=0$$

$$\Pi_{B,D} \equiv 2y-2z+10-r_D^2+r_B^2=0$$

La condición de que S_A y S_B sean tangentes es que cada una de ellas diste de su plano radical tanto como su radio:

$$d(A,\Pi_{A,B}) \equiv \frac{|2\cdot 5+2(-3)-6-r_a^2+r_B^2|}{\sqrt{8}}=r_a \quad (*)$$

$$d(B,\Pi_{A,B}) \equiv \frac{|2\cdot 6+2(-2)-6-r_a^2+r_B^2|}{\sqrt{8}}=r_B$$

Como A y B están en lados opuestos del plano, uno de estos puntos está en el lado positivo y otro en el lado negativo de $\Pi_{A,B}$. Nuestro sistema de ecuaciones se transforma en

$$2+r_a^2-r_B^2=\sqrt{8}\,r_a$$

$$2-r_a^2+r_B^2=\sqrt{8}\,r_B$$

Despejando $\sqrt{8}$ de ambas ecuaciones e igualando:

$$\frac{2+r_a^2-r_B^2}{r_a}=\frac{2-r_a^2+r_B^2}{r_B}$$

$$\Longleftrightarrow 2r_B+r_a^2r_B-r_B^3=2r_a-r_a^3+r_ar_B^2$$

$$\Longleftrightarrow -2(r_a-r_B)+(r_a^3-r_B^3)+(r_a^2r_B-r_ar_B^2)=0$$

$$\Longleftrightarrow (r_a-r_B)\left[-2+(r_a^2+r_ar_b+r_b^2)+r_Br_a\right]=0$$

$$\Longleftrightarrow (r_a-r_B)\left[(r_a+r_B)^2-2\right]=0$$

Elegimos la opción $r_a=r_B$, ya que la segunda opción solamente nos dice $(r_a+r_B)^2=2$, lo cual es cierto ya que $d(A,B)=\sqrt{2}$, es decir, $r_a+r_B=\sqrt{2}$ es cierto pero no informativo.

Ahora, por $(*)$:

$$r_a=\frac{|2|}{\sqrt{8}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore r_B=1/\sqrt{2}$

Por el mismo argumento, $r_c=d(C,\Pi_{A,C})$

$$\Longleftrightarrow \frac{\left|2(-2)+2(3)-\frac{1}{2}+r_c^2\right|}{\sqrt{2}}=r_c$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\left|3/2+r_c^2\right|}{\sqrt{8}}=r_c \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{8}}r_c^2-r_c+\frac{3}{2\sqrt{8}}=0 \Rightarrow r_c=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ó } \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Elegimos $r_c=1/\sqrt{2}$, ya que $d(A,C)=\sqrt{2}$, pero también $d(A,C)=r_a+r_c$, y hemos visto ya que $r_a=1/\sqrt{2}$.

Por último, $r_D=d(D,\Pi_{A,D})=\dfrac{\left|2(6)+2(3)-16-1/2+r_D^2\right|}{\sqrt{8}}$

$$\Longleftrightarrow \frac{3/2+r_D^2}{\sqrt{8}}=r_D \Rightarrow r_D=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ó } \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Nuevamente, $d(A,D)=\sqrt{2}$, por lo que

$r_D=1/\sqrt{2}$.

En conclusión, los radios de nuestras esferas son $r_A = r_B = r_C = r_D = 1/\sqrt{2}$

Encuentra la ecuación de la esfera que pasa por los cuatro puntos A, B, C, D.

Buscamos x_c, y_c, z_c, r números tales que

$$\begin{aligned}(x_c-5)^2+(y_c+3)^2+(z_c-2)^2&=r^2\\(x_c-6)^2+(y_c+2)^2+(z_c-2)^2&=r^2\\(x_c-5)^2+(y_c+2)^2+(z_c-3)^2&=r^2\\(x_c-6)^2+(y_c+3)^2+(z_c-3)^2&=r^2;\end{aligned}$$

desarrollando:

$$\begin{aligned}x_c^2+y_c^2+z_c^2-10x_c+6y_c-4z_c+38-r^2&=0\\x_c^2+y_c^2+z_c^2-12x_c+4y_c-4z_c+44-r^2&=0\\x_c^2+y_c^2+z_c^2-10x_c+4y_c-6z_c+38-r^2&=0\\x_c^2+y_c^2+z_c^2-12x_c+6y_c-6z_c+54-r^2&=0\end{aligned}$$

Eliminando términos cuadráticos:

$$\begin{aligned}2x_c+2y_c&=6\\2x_c-2z_c&=6\\2x_c-2y_c&=16\end{aligned}$$

Entonces, $x_c = 11/2$, $y_c = -5/2$, $z_c = 5/2$. Utilizando alguna de las primeras cuatro ecuaciones, $r^2 = 3/4$. Entonces, la esfera es

$$\left(x-\tfrac{11}{2}\right)^2+\left(y+\tfrac{5}{2}\right)^2+\left(z-\tfrac{5}{2}\right)^2=\tfrac{3}{4}$$

Un plano (que no corta la esfera con centro en A) se pone en contacto con las esferas alrededor de B, C, D. Encuentra su ecuación y su distancia a A.

El plano que buscamos lo expresaremos de la forma $\alpha x+\beta y+\gamma z+1=0$. Para que sea tangente a S_B, S_C, S_D debe ocurrir que $d(C_i, \Pi) = r_i$, con $i = B, C, D$. Podemos expresar estas condiciones mediante el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}6\alpha-2\beta+2\gamma&=-1+2=3\\5\alpha-2\beta+3\gamma&=-1+2=3\\6\alpha-3\beta+3\gamma&=-1+2=3\end{aligned}$$

(16) (2ª parte) Si U es el centro de la esfera encontrada, demuestre que la esfera que tiene a $\overline{OU}$ como diámetro pasa por los puntos medios de los 6 bordes del tetrahedro OABC

$\overrightarrow{OU} = (a/2,\ b/2,\ c/2)$, según la primera parte de este ejercicio. Si $\bar{x}$ es el vector de posición de un punto de la esfera que tiene a $\overleftrightarrow{OU}$ como diámetro:

$$(\bar{x} - \overrightarrow{OO}) \cdot (\bar{x} - \overline{OU}) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (x, y, z) \cdot \left((x - a/2), (y - b/2), (z - c/2) \right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 - \left(\frac{xa + by + cz}{2} \right) = 0$$

Entonces, podemos pensar a nuestra esfera como dada por la ecuación

$$S(\overrightarrow{OP}) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - \left(\frac{xa + by + cz}{2} \right) = 0$$

donde $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$.

Evaluando la función en los 6 puntos medios indicados:

$$S\left(\frac{\overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OA}}{2} \right) = S\left(\frac{a}{2}, 0, 0 \right) = \left(\frac{a}{2} \right)^2 - \frac{a^2}{2 \cdot 2} = 0 \quad \therefore \quad \frac{1}{2}(\overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OA}) \in S.$$

$$S\left(\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} \right) = S\left(\frac{a}{2}, 0, \frac{c}{2} \right) = \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \left(\frac{c}{2} \right)^2 - \left(\frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} \right) = 0 \quad \therefore \quad \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \in S.$$

$$S\left(\frac{\overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OC}}{2} \right) = S\left(0, 0, \frac{c}{2} \right) = \left(\frac{c}{2} \right)^2 - \left(\frac{c^2}{4} \right) = 0 \quad \therefore \quad \frac{1}{2}(\overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OC}) \in S.$$

$$S\left(\frac{\overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OB}}{2} \right) = S\left(0, \frac{b}{2}, 0 \right) = \left(\frac{b}{2} \right)^2 - \left(\frac{b^2}{4} \right) = 0 \quad \therefore \quad \frac{1}{2}(\overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OB}) \in S.$$

$$S\left(\frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}}{2} \right) = S\left(0, \frac{b}{2}, \frac{c}{2} \right) = \left(\frac{b}{2} \right)^2 + \left(\frac{c}{2} \right)^2 - \left(\frac{b^2 + c^2}{4} \right) = 0 \quad \therefore \quad \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}) \in S.$$

$$S\left(\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \right) = S\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right) = \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \left(\frac{b}{2} \right)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2}{4} \right) = 0 \quad \therefore \quad \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \in S.$$

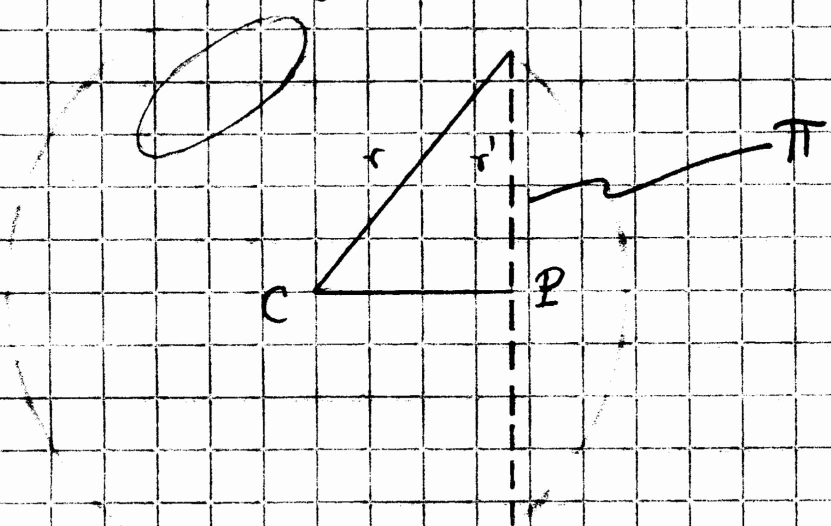
Por lo tanto, la esfera que tiene a $\overleftrightarrow{OU}$ como diámetro pasa por los 6 bordes del tetrahedro OABC.

(20) Encuentra la condición para que el plano $\Pi \equiv lx+my+nz+p=0$ corte a la esfera $S\equiv x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz-c=0$ en un círculo real.

Reescribimos la ecuación de la esfera $S\equiv (x+u)^2+(y+v)^2+(z+w)^2-u^2-v^2-w^2-c=0$. Una condición sencilla para que $\Pi\cap S\neq\emptyset$ es $d(C,\Pi)\leq r$, donde C es el centro de la esfera. Esto lo podemos expresar de manera equivalente como

$$\frac{|lu+mv+nw+p|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\leq\sqrt{u^2+v^2+w^2+c}$$

Prueba que el plano $x+2y-z=4$ corta la esfera $x^2+y^2+z^2-x+z-2=0$ en un círculo de radio unitario y encuentra la ecuación de la esfera que tiene a este círculo como uno de sus grandes círculos.



La ecuación de la esfera puede escribirse como $(x-\frac{1}{2})^2+y^2+(z+\frac{1}{2})^2=5/2$

Entonces, $d(C,\Pi)=\frac{|1(1/2)+2(0)-1(-1/2)-4|}{\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}}$, y como $\frac{3}{\sqrt{6}}<\sqrt{\frac{5}{2}}$,

$S\cap\Pi\neq\emptyset$. Si r' denota al radio del círculo, r' satisface

$$(r')^2=r^2-d(C,\Pi)^2$$

por el Teorema de Pitágoras, es decir, $(r')^2=\frac{5}{2}-\frac{9}{6}=\frac{12}{12}=1$ $\therefore$ $r'=1$.

De la ecuación de Π, un vector normal a Π y unitario es $\vec{\eta}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$, de donde $\overrightarrow{CP}=d(C,\Pi)\vec{\eta}=\frac{1}{2}(1,2,-1)$. Entonces $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}=(1,1,-1)$.

En conclusión, el círculo es unitario y tiene centro en $P(1,1,-1)$.

Además, la esfera buscada es

$$\Sigma : (x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2 = 1.$$

ya que debe tener el mismo centro y el mismo radio que el círculo descrito si queremos que sea uno de sus grandes círculos.

(21) Prueba que las líneas tangentes del origen de coordenadas a la esfera

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=k^2$$

son generadoras del cono dado por la ecuación $(a^2+b^2+c^2-k^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$.

Si $P_1(0,0,0)$, tenemos lo siguiente, de acuerdo con la notación que hasta ahora hemos utilizado:

$$S\equiv x^2+y^2+z^2-2xa-2yb-2zc+a^2+b^2+c^2-k^2$$

$$S_{11}\equiv a^2+b^2+c^2-k^2$$

$$S_1\equiv -ax-by-cz+a^2+b^2+c^2-k^2.$$

Las tangentes del origen de coordenadas a la esfera son precisamente el cono tangente a la esfera que tiene su vértice en el origen, y de lo que ya sabemos, su ecuación está dada por:

$$S_{11}S=S_1^2$$

$$\iff (a^2+b^2+c^2-k^2)(x^2+y^2+z^2-2xa-2yb-2zc+a^2+b^2+c^2-k^2)=[ax+by+cz-(a^2+b^2+c^2-k^2)]^2$$

$$\iff (a^2+b^2+c^2-k^2)(x^2+y^2+z^2)-2(xa+yb+zc)(a^2+b^2+c^2-k^2)+(a^2+b^2+c^2-k^2)^2=$$
$$(ax+by+cz)^2-2(ax+by+cz)(a^2+b^2+c^2-k^2)+(a^2+b^2+c^2-k^2)^2$$

$$\iff (a^2+b^2+c^2-k^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2.$$

Por lo tanto, el cono $S_{11}S=S_1^2$ también puede escribirse de la manera $(a^2+b^2+c^2-k^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$, lo cual termina la demostración.

(23) Encuentra la longitud de la cuerda generada por la línea

$$x-2y+3=0,\ 2x-2y-z+5=0$$

y la esfera $x^2+y^2+z^2-2x+3y-16=0$.

Primero pondremos esta ecuación en su forma paramétrica: un vector director viene dado por el producto cruz de los vectores normales de los planos dados:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (2,1,2).$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones de ambos planos para $z=0$ encontramos el punto $(-2, 1/2, 0)$.

$$\therefore \ \ell(t) = (-2, 1/2, 0) + t(2,1,2)$$

Encontrando los valores de t para los cuales existe una intersección:

$$(-2+2t)^2 + (1/2+t)^2 + (2t)^2 - 2(-2+2t) + 3(1/2+t) - 16 = 0$$

$$\iff 9t^2 - 8t - \frac{25}{4} = 0 \implies t = \frac{8 \pm \sqrt{64+25\cdot 9}}{18} = \frac{8 \pm 17}{18}$$

$$\therefore t_1 = \frac{8+17}{18} = 25/18, \quad t_2 = \frac{8-17}{18} = -1/2.$$

Entonces, $\ell(t_1) = (-2, 1/2, 0) + t_1(2,1,2) = (-2, 1/2, 0) + \frac{25}{18}(2,1,2) = (-2, \frac{1}{2}, 0) + (\frac{25}{9}, \frac{25}{18}, \frac{25}{9})$

$$= (7/9, 17/9, 25/9)$$

$$\ell(t_2) = (-2, 1/2, 0) - \frac{1}{2}(2,1,2) = (-2, \frac{1}{2}, 0) + (-1, -\frac{1}{2}, -1) = (-3, 0, -1).$$

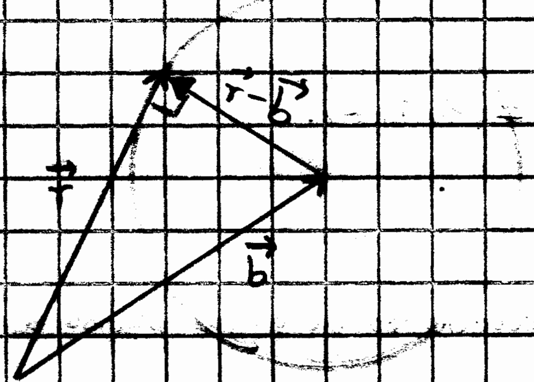
$\therefore$ La longitud buscada es

$$d\big((-3,0,-1), (7/9, 17/9, 25/9)\big) = \sqrt{(3+7/9)^2 + (17/9)^2 + (1+25/9)^2} = \sqrt{\left(\frac{34}{9}\right)^2 + \left(\frac{17}{9}\right)^2 + \left(\frac{34}{9}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{9}\sqrt{2\cdot 34^2 + 17^2} = \frac{1}{9}\sqrt{2601} = \frac{51}{9}$$

(25) Un cono tiene su vértice en el origen y consta de las tangentes a la esfera de radio a y centro $\vec{b}$. Demuestra que los vectores de posición $\vec{r}$ de los puntos del cono satisfacen la ecuación

$$(\vec{r}\cdot\vec{b})^2 = (b^2 - a^2)\,r^2$$



La condición para que $\vec{r}$ sea vector de posición de un punto de la esfera es

$$|\vec{r}-\vec{b}|^2 = a^2$$

$$\Longleftrightarrow \vec{r}\cdot\vec{r} - 2\vec{r}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} = a^2 \qquad (*)$$

$$\Longleftrightarrow r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{b} + b^2 = a^2$$

$$\Longleftrightarrow r^2 = a^2 + 2\vec{r}\cdot\vec{b} - b^2$$

La condición para que $\vec{r}$ sea vector de posición de un punto de la esfera es

$$\vec{r}\cdot(\vec{r}-\vec{b}) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \vec{r}\cdot\vec{r} = \vec{r}\cdot\vec{b}$$

$$\Longleftrightarrow r^2 = \vec{r}\cdot\vec{b}, \qquad (**)$$

y en virtud de $(*)$:

$$a^2 + 2\vec{r}\cdot\vec{b} - b^2 = \vec{r}\cdot\vec{b}$$

$$\Longleftrightarrow \quad a^2 - b^2 = -\vec{b}\cdot\vec{r}$$

$$\Longrightarrow \quad (\vec{b}\cdot\vec{r})^2 = (b^2-a^2)(b^2-a^2).$$

Pero $b^2 - a^2 = 2\vec{r}\cdot\vec{b} - r^2$ por $(*)$, y además

$$2\vec{r}\cdot\vec{b} - r^2 = 2r^2 - r^2 = r^2$$

gracias a $(**)$.

Por lo tanto, $b^2 - a^2 = r^2$.

Finalmente, $(\vec{r}\cdot\vec{b})^2 = (b^2-a^2)r^2$, justo como deseábamos.

Si $\vec{n}$ es un vector unitario, demuestra que la condición para que el plano $\vec{n}\cdot\vec{r} = p$ toque la esfera $|\vec{r}-\vec{c}|^2 = a^2$ es

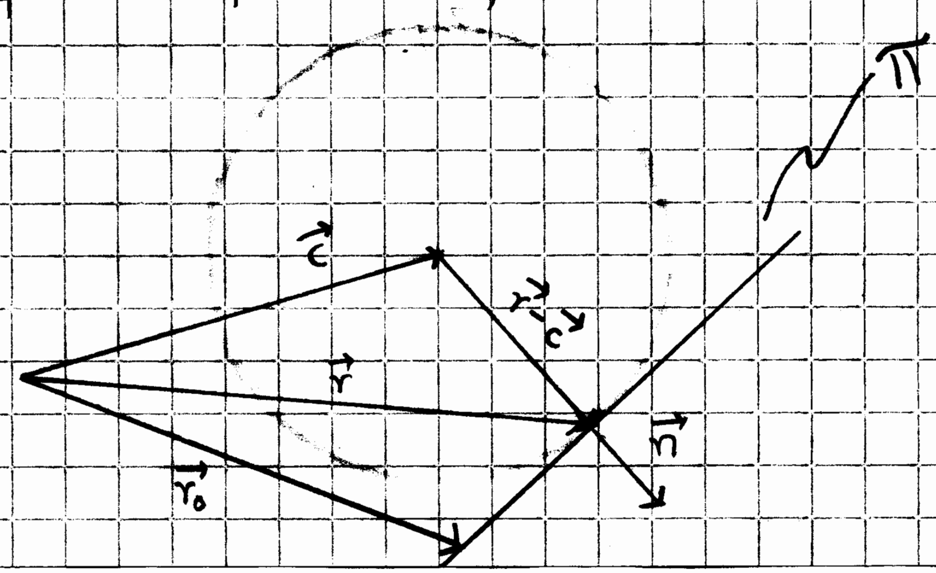
$$(p - \vec{n}\cdot\vec{c})^2 = a^2.$$

La condición para que un punto localizado por el vector de posición $\vec{r}$ pertenezca a la esfera es $|\vec{r}-\vec{c}|^2 = a^2$, lo cual equivale a

$$r^2 + c^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{c} = a^2$$

$$\Longleftrightarrow r^2 = a^2 - c^2 + 2\vec{r}\cdot\vec{c} \qquad (\cdot)$$

Sea $\vec{r_0}$ tal que $\vec{n}\cdot\vec{r_0} = p$. Por último, como $\vec{n}$ es unitario, $\vec{r}-\vec{c} = a\vec{n}$, o bien, $\vec{r} = \vec{c} + a\vec{n}$



Como el plano tangente a una esfera es ortogonal al radio de ésta, la condición para que el plano sea tangente a la esfera la podemos expresar como

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot(\vec{r}-\vec{c})=0$$

$$\iff \vec{r}\cdot\vec{r}-\vec{r}\cdot\vec{c}-\vec{r}_0\cdot\vec{r}+\vec{r}_0\cdot\vec{c}=0$$

$$\iff r^2-\vec{r}\cdot\vec{c}-\vec{r}_0\cdot\vec{r}+\vec{r}_0\cdot\vec{c}=0$$

$$\iff a^2-c^2+2\vec{r}\cdot\vec{c}-\vec{r}\cdot\vec{c}-\vec{r}_0\cdot\vec{r}+\vec{r}_0\cdot\vec{c}=0$$

en virtud de $(\bullet)$. Pero esto también equivale a

$$a^2-c^2+\vec{r}\cdot\vec{c}-\vec{r}_0\cdot\vec{r}+\vec{r}_0\cdot\vec{c}=0$$

$$\iff a^2-c^2+(a\vec{n}+\vec{c})\cdot\vec{c}-\vec{r}_0\cdot(a\vec{n}+\vec{c})+\vec{r}_0\cdot\vec{c}=0$$

$$\iff a^2-c^2+a\vec{n}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{c}-a\vec{n}\cdot\vec{r}_0-\vec{r}_0\cdot\vec{c}+\vec{r}_0\cdot\vec{c}=0$$

$$\iff a^2+a\vec{n}\cdot\vec{c}-ap=0$$

$$\iff a^2=ap-a\vec{n}\cdot\vec{c}$$

$$\iff a=p-\vec{n}\cdot\vec{c}$$

ya que $a\neq 0$, pues nuestra esfera tiene radio no nulo (por hipótesis). Elevando al cuadrado ambos lados del último renglón obtenemos lo que deseamos:

$$a^2=(p-\vec{n}\cdot\vec{c})^2.$$