Geometría Analítica II
EXAMEN 2

Profesor: Pablo Barrera — Día 28 de abril, 2005

NOMBRE: Patricia Vélez Mellado

Resuelva adecuadamente los siguientes ejercicios.

1. Considere el círculo

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y + 4z - 5 = 0, \quad \Pi : 5y + 6z + 1 = 0,$$

   encuentre la esfera que tiene a ese círculo como círculo máximo.

2. Considere la esfera $x^2+y^2+z^2+2x-4y+1 = 0$ y un punto $P(2,1,-3)$ fuera de ella. Encuentre la ecuación del cono formado por líneas tangentes que parten de P hacia esa esfera.

3. Considere la esfera unitaria, y la línea descrita por

$$P(t) = (0,0,3) + t(1,1,4),$$

   encuentre los planos donde vive esta línea y son tangentes a la esfera.

4. Encuentre la ecuación de la esfera con centro en $(1,1,1)$ la cual es cortada por una cuerda de longitud 16 unidades por la línea

$$2x + y - z = 7, \qquad 4x - 4y - 5z = 29.$$

5. Los puntos $A, B, C,$ y D tienen por coordenadas $(2,0,0), (0,2,0), (0,0,2)$ y $(-2,-2,0)$ respectivamente. Encuentre los puntos en los que la línea CD intersecta a la esfera con diámetro AB.

Nota: Argumente adecuadamente su respuesta; no serán tomadas en cuenta observaciones o señalamientos que realicen, sin su debida justificación.

1. Considere el círculo

$S: x^2+y^2+z^2-2x+3y+4z-5=0$, $\Pi: 5y+6z+1=0$

encuentre la esfera que tiene a este círculo como círculo máximo

el centro de S es $\xi(1,-\frac{3}{2},-2)$

$\Rightarrow$ el radio de la esfera buscada que es igual al radio del círculo es:

$R^2 = r^2 - d^2$

donde $d = d(\Pi, \xi)$, i.e.

$$d = \left| \frac{5}{\sqrt{61}}(-3/2) + \frac{6}{\sqrt{61}}(-2) + \frac{1}{\sqrt{61}} \right| = \frac{13}{\sqrt{61}}$$

r = radio de S

$$(x-1)^2 + (y+\tfrac{3}{2})^2 + (z+2)^2 - \frac{49}{4} = 0$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{49}{4} - \frac{169}{61} = \frac{2313}{244}$$

Por otro lado, considerar la recta que pasa por ξ y cuyo vector dirección es $(0,5,6)$

$$P(t) = (1, -\tfrac{3}{2}, -2) + t(0,5,6)$$

Como $P(t)$ es ortogonal al plano, el centro del círculo pertenece a $P(t)$, además es $P(t) \cap \Pi$, i.e.:

$$5\left(-\tfrac{3}{2} + 5t\right) + 6\left(-2+6t\right) + 1 = 0$$

$$25t + 36t = 37/2$$

$$t = +\frac{37}{122}$$

Por lo que el centro es:

$$P\left(\frac{37}{122}\right)=\left(1,-\frac{3}{2},-2\right)+\frac{37}{122}(0,5,6)$$

$$=\left(1,\frac{1}{61},-\frac{11}{61}\right)$$

Entonces, la ec. de la esfera buscada es:

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{61}\right)^2+\left(z+\frac{11}{61}\right)^2=\frac{2313}{244}$$

2. Considere la esfera $x^2+y^2+z^2+2x-4y+1=0$ y un pto. $P_2(2,1,-3)$ fuera de ella. Encuentre la ec. del cono formado por líneas tangentes desde P hacia la esfera

la esfera se puede ver como:

$$(x+1)^2+(y-2)^2+z^2-4=0$$

Por lo que su centro es $\xi(-1,2,0)$ y su radio es $r=2$

Por otra parte, la ec. del cono tangente está dada por

$$\measuredangle(P,P)\cdot\measuredangle(P_2,P_2)=(\measuredangle(P,P_2))^2$$, en este caso

$$\measuredangle(P,P)=(P-\xi)\cdot(P-\xi)-4=(x+1)^2+(y-2)^2+z^2-4$$

$$\measuredangle(P_2,P_2)=\|P_2-\xi\|^2-4=\|(3,-1,-3)\|^2-4=15$$

$$\measuredangle(P,P_2)=(P-\xi)\cdot(P_2-\xi)-4=(x+1,y-2,z)\cdot(3,-1,-3)-4$$

$$=3(x+1)-(y-2)-3z-4$$

$$=3x-y-3z+1$$

La ec. del cono queda

$$15\left((x+1)^2+(y-2)^2+z^2-4\right)=(3x-y-3z+1)^2$$

3. Considere la esfera unitaria, y la línea descrita por

$$P(t) = (0,0,3) + t(1,1,4)$$

Encuentre los planos donde vive esta línea y son tangentes a la esfera

La ec. de la esfera es:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

los ptos de intersección de $P(t)$ y la esfera están dados por valores de t tales que se satisfaga:

$$t^2 + t^2 + (3+4t)^2 = 1$$

$$2t^2 + 9 + 24t + 16t^2 = 1$$

$$18t^2 + 24t + 8 = 0 \quad \dots (i)$$

$$t_{1,2} = \frac{-24 \pm \sqrt{(24)^2 + 4(18)(8)}}{2(18)}$$

como $(24)^2 + 4(18)(8) = 0$; (i) tiene una raíz doble, por lo que la recta es tangente a la esfera en el pto:

$$p^* = P(t_1) = (0,0,3) - \frac{2}{3}(1,1,4) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$\Rightarrow$ el plano tangente a la esfera al que pertenece la rec^ta está descrito por:

$$d(P^*, P) = (-2/3, -2/3, 1/3)\cdot(x,y,z) - 1 = 0$$

i.e. $\quad \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + 1 = 0$

4. Encuentre la ecuación de la esfera con centro en $(1,1,1)$ la cual es cortada por una cuerda de longitud 16 u por la línea

$$2x+y-z=7 \quad , \quad 4x-4y-5z=29$$

los ptos. $P_1\ (1,0,-5)$ $\in$ a la recta dada
$P_2\ (4,-2,-1)$

$\Rightarrow$ su forma paramétrica es:

$$P(t)=(1,0,-5)+t(3,-2,4)$$

Por otro lado la ec. de la esfera es:

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=r^2 \quad \text{para cierta } r$$

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+(3-r^2)=0$$

la intersección de $P(t)$ y la esfera son dos ptos. para ciertas t_1 y t_2:

$$(1+3t)^2+(-2t)^2+(-5+4t)^2-2(1+3t)-2(-2t)-2(-5+4t)+(3-r^2)=0$$

$$1+\cancel{6t}+9t^2+4t^2+25+\cancel{40t}+16t^2-2-\cancel{6t}+\cancel{4t}+10-8t+(3-r^2)=0$$

$$29t^2+36t+(37-r^2)=0$$

$$t=\frac{-36\pm\sqrt{(36)^2-116(37-r^2)}}{2(29)}=\frac{-36\pm\sqrt{-2996+116r^2}}{2(29)}$$

$\Rightarrow$ los ptos. de intersección son:

$$x=1+3t \quad y=-2t \quad , \quad -5+4t=z$$

$$P_1=\left(-\frac{25}{29}+\frac{3\sqrt{-2996+116r^2}}{2(29)},\ \frac{36}{29}-\frac{2\sqrt{-2996+116r^2}}{2(29)},\ -\frac{217}{29}+\frac{4\sqrt{-2996+116r^2}}{2(29)}\right)$$

$$P_2=\left(-\frac{25}{29}-\frac{3\sqrt{-2996+116r^2}}{2(29)},\ \frac{36}{29}+\frac{2\sqrt{-2299+116r^2}}{2(29)},\ -\frac{217}{29}-\frac{4\sqrt{-2996+116r^2}}{2(29}\right)$$

Pero se tiene que

$\|P_1 P_2\| = 16$, i.e.

$$\left\| \left(-\frac{6\sqrt{-2996+116r^2}}{2(29)}, \frac{4\sqrt{-2996+116r^2}}{2(29)}, -\frac{8\sqrt{-2996+116r^2}}{2(29)} \right) \right\| = 16$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4(29)^2}\left(36(-2996+116r^2)+16(-2996+116r^2)+64(-2996+116r^2)\right) = (16)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4(29)^2}\left(-347536+13456r^2\right) = 256$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 = \frac{2605}{29}$$

entonces la ec. de la esfera buscada es:

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = \frac{2605}{29}$$

5. Los ptos. A, B, C y D tienen por coordenadas $(2,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,2)$ y $(-2,-2,0)$ respectivamente. Encuentre los puntos en los que la línea $\overline{CD}$ intersecta a la esfera con diamētro $\overline{AB}$.

el centro de la esfera es el pto medio del segmento AB:

$$P_0 = \frac{(2,0,0)+(0,2,0)}{2} = \frac{1}{2}(2,2,0) = (1,1,0)$$

$\Rightarrow$ el radio r de la esfera es:

$\| P_0 A \| = \| (1,-1,0) \| = \sqrt{2}$

La ecuación de la esfera es:

$(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 2$

$x^2+y^2+z^2-2x-2y=2$

Por otra parte:

la forma paramétrica de la recta es

$P(t) = (0,0,2) + t(1,1,1)$

Se buscan valores de t para los que se satisfaga:

$t^2 + t^2 + (2+t)^2 - 2t - 2t - 2 = 0$

$2t^2 + (4+4t+t^2) - 4t - 2 = 0$

$3t^2 + 2 = 0 \quad \ldots \quad (i)$

$3t^2 = -2 \; !$

Como (i) no tiene soluciones reales la recta no intersecta a la esfera.