Geometría Analítica II

EXAMEN 2

Profesor: Pablo Barrera   Día 28 de abril, 2005

NOMBRE: Juan Salvador Garza Ledesma

Resuelva adecuadamente los siguientes ejercicios.

1. **Considere el círculo**

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y + 4z - 5 = 0, \quad \Pi : 5y + 6z + 1 = 0,$$

encuentre la esfera que tiene a ese círculo como círculo máximo.

2. Considere la esfera $x^2+y^2+z^2+2x-4y+1=0$ y un punto $P(2,1,-3)$ fuera de ella. Encuentre la ecuación del cono formado por líneas tangentes que parten de P hacia esa esfera.

3. Considere la esfera unitaria, y la línea descrita por

$$P(t) = (0,0,3) + t(1,1,4),$$

encuentre los planos donde vive esta línea y son tangentes a la esfera.

4. Encuentre la ecuación de la esfera con centro en $(1,1,1)$ la cual es cortada por una cuerda de longitud 16 unidades por la línea

$$2x + y - z = 7, \qquad 4x - 4y - 5z = 29.$$

5. Los puntos $A, B, C,$ y D tienen por coordenadas $(2,0,0), (0,2,0), (0,0,2)$ y $(-2,-2,0)$ respectivamente. Encuentre los puntos en los que la línea CD intersecta a la esfera con diámetro AB.

Nota: Argumente adecuadamente su respuesta; no serán tomadas en cuenta observaciones o señalamientos que realicen, sin su debida justificación.

① Podemos escribir la ecuación S como:

$$(x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+(z+2)^2 = 5+1+\frac{9}{4}+4 =$$

$$= 10+\frac{9}{4} = \frac{49}{4} = \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

De aquí que S tiene centro en $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$ y radio $\frac{7}{2}$. Para hallar el centro del círculo $S \cap \Pi$ tomamos la intersección de la recta que va de P_0 perpendicular a Π con Π aprovechando la simetría de la esfera. Esta recta ($\mathcal{L}$) tiene como uno de sus vectores de dirección a $(0, 5, 6)$, pues este es el vector ortogonal a Π: $5y+6z+1=0$ 'de regalo' $\Rightarrow$

$$\mathcal{L}: \quad \bar{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \to \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\Leftrightarrow$

$$x = 1$$
$$y = 5t - \frac{3}{2}$$
$$z = 6t - 2$$

'Zambutiendo' esto en Π para hallar $\Pi \cap \mathcal{L}$ tenemos:

$$5\left(5t-\frac{3}{2}\right)+6(6t-2)+1=0 \Leftrightarrow$$

$$61t - \frac{15}{2} - 11 = 0 \Leftrightarrow 61t = \frac{37}{2} \Leftrightarrow t = \frac{37}{122}$$

$\Rightarrow$ El centro del círculo es:

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{185}{122} \\ \frac{222}{122} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{122} \\ -\frac{22}{122} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{61} \\ -\frac{11}{61} \end{pmatrix}.$$

Finalmente hallemos el radio del círculo usando Pitágoras, tenemos:

$$d(P_0, \Pi) = \left| \frac{-\frac{15}{2} + 12 + 1}{\sqrt{25+36}} \right| = \frac{\frac{37}{2}}{\sqrt{61}} = \frac{37}{2\sqrt{61}}$$

Como el radio de la esfera es $\frac{7}{2}$ $\Rightarrow$

$$(\text{Radio del círculo})^2 = \frac{49}{4} - \frac{1369}{244} = \frac{2989 - 1369}{244} = \frac{1620}{244} = \frac{405}{61}$$

$\therefore$ La esfera buscada:

$$\boxed{(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{61}\right)^2 + \left(z + \frac{18}{61}\right)^2 = \frac{405}{61}}$$

(2) Como no nos 'metamos en vano' buscando las intersecciones de una esfera $\|\bar{P}-P_0\|^2=r^2$ con una recta en general por dos puntos P_1 y P_2 hallando el valor del discriminante de la ecuación que resultaba en t $(\bar{P}=P_1+t(P_1-P_2))$ en términos de la función

$$\delta(p,q)=(p-P_0)^t\cdot(q-P_0)-r^2$$

como

$$\Delta=(\delta_{12}^2-\delta_{11}\delta_{22})4 \quad \text{donde} \quad \delta_{ij}\equiv\delta(P_i,P_j).$$

Vamos a usarlo, en este caso la esfera se puede poner como:

$$(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=4 \Leftrightarrow \left\|P-\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\right\|^2=4$$

es decir $P_0=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ y $r^2=4$.

y aquí sea $P_1=(2,1,-3)$. (¡Ah! una cosa, este P_1 al ser evaluado en la esfera:

$$(2+1)^2+(1-2)^2+3^2=19>4$$ para no andar como el Borras, P_1 está fuera de la esfera).

Dejemos entonces a P_2 ~~variable, llamé sea~~ P en general e impongamos que la línea P_1P sea tangente a la esfera dada para obtener el cono

$$\Rightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow \delta_{1P}^2=\delta_{11}\delta_{PP} \Rightarrow$$ la ecuación deseada es:

$$\left[\left(\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\right)^t\cdot\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\right)-4\right]^2=15\left[\left\|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\right\|^2-4\right]$$

o bien:

$$(3x - y - 3z + 1)^2 = 15\left[(x+1)^2 + \text{[illegible]}\right]$$

---

③ $p(t) = (0,0,3) + t(1,1,4)$: $\mathcal{L}$

$S: \; x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Sean Π_1 y Π_2 dichos planos. $\Rightarrow$ sus ecuaciones deben tener la forma (sus ecuaciones implícitas)

$\Pi_1: \; A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$

$\Pi_2: \; A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$

Notemos que ni Π_1 ni Π_2 pueden pasar por el origen pues el centro de la esfera es este punto y entonces Π_1 y Π_2 cortarían a ésta en un círculo máximo! $\Rightarrow$ $D_1, D_2 \neq 0$ $\Rightarrow$ podemos dividir las ecuaciones entre D_i y renombrar $\alpha_i = \frac{A_i}{D_i}$, $\beta_i = \frac{B_i}{D_i}$, $\gamma_i = \frac{C_i}{D_i}$ y tener:

$\Pi_1: \; \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + 1 = 0$

$\Pi_2: \; \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + 1 = 0$.

Ahora bien, como $(0,0,3) \in \mathcal{L} = \Pi_1 \cap \Pi_2$

$\Rightarrow$ $3\gamma_1 = -1 \;\wedge\; 3\gamma_2 = -1 \Leftrightarrow$

$\gamma_1 = -\frac{1}{3} \;\wedge\; \gamma_2 = -\frac{1}{3}$

Por otro lado el punto $(0,0,3) - (1,1,4) \in \mathcal{L}$ (caso especial $t = -1$) $\Rightarrow$ $(-1,-1,-1)$ cumple Π_1 y Π_2

$\iff -\alpha_1 - \beta_1 + \frac{1}{3} + 1 = 0$

$\iff \alpha_1 + \beta_1 = \frac{4}{3} \iff \beta_1 = \frac{4}{3} - \alpha_1$ *

Ahora el paso de la muerte, como ambos planos deben ser tangentes a $x^2+y^2+z^2 = 1$ la distancia de Π_1 y Π_2 al origen debe ser 1

$$\iff \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\frac{1}{9}}} = 1 \iff \alpha_1^2+\beta_1^2 = \frac{8}{9}$$

Usando * tenemos:

$$\alpha_1^2 + \left(\frac{4}{3}-\alpha_1\right)^2 = \frac{8}{9} \iff 2\alpha_1^2 - \frac{8}{3}\alpha_1 - \frac{8}{9} = 0$$

$$\iff \alpha_1 = \frac{\frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9}-\frac{64}{9}}}{4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow \beta_1 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \Pi_1$ tiene por ecuación

$$\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + 1 = 0 \iff \boxed{2x+2y-z+3=0}$$

(No sé por qué cargué con los α_2, β_2 !).

¡Qué horror! el punto $(-1,-1,-1)$ es precisamente el punto de tangencia de este plano con la esfera y está en $\mathcal{L}$! Esto se vio reflejado algebraicamente en que la cuadrática en α_1 sólo tuvo una solución, no hay más que un plano tangente a la esfera que contenga a $\mathcal{L}$.

(4) centro en $(1,1,1)$

$$\mathcal{L}: 2x + y - z = 7 \cap 4x - 4y - 5z = 29,$$

Pasemos esta $\mathcal{L}$ a la forma vectorial para hacer el trabajo más fácil. Así haremos $y=0$ en ambos planos:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - z = 7 \\ 4x - 5z = 29 \end{array}\right\} \Rightarrow -3z = 15 \Rightarrow z = -5$$

$$\Rightarrow 2x + 5 = 7 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow P_0 = (1, 0, -5) \in \mathcal{L}.$$

Tomemos el producto cruz de los vectores ortogonales a los planos de $\mathcal{L}$ para obtener un vector en su dirección:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & -5 \end{vmatrix} = (-9, 6, -12)$$

o tomemos el paralelo a éste $(3, -2, 4)$ ¡más económico! $\Rightarrow$

$$\mathcal{L} \equiv P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} ; \; t \in \mathbb{R}$$

Nos interesa ahora un $Q \in \mathcal{L}$ tal que su el vector que va del centro de la esfera $(1,1,1)$ a Q sea ortogonal a $\mathcal{L}$ para hallar el punto medio de la cuerda que interesa.

Todos los vectores de $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ a $\mathcal{L}$ tienen la forma

$$\overline{Q} = \begin{pmatrix}1\\0\\-5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$$

y queremos que $\overline{Q} \perp \mathcal{L} \iff$

$$\left[\begin{pmatrix}0\\-1\\-6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \quad 9t + 4t + 2 + 16t - 24 = 0$$

$$\iff \quad 29t = 22 \iff t = \frac{22}{29},$$

$$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix}1\\0\\-5\end{pmatrix} + \frac{22}{29}\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{95}{29}\\-\frac{44}{29}\\-\frac{57}{29}\end{pmatrix}.$$

entonces la $(\text{distancia})^2$ del centro de la esfera al punto medio de la cuerda es:

$$d^2\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, Q\right) = \frac{1}{29^2}\left(66^2 + 73^2 + 86^2\right) =$$

$$= \frac{17081}{841} = \frac{589}{29}$$

Ahora por Pitágoras el radio de la esfera buscada será $R^2 = \frac{589}{29} + 64 = \frac{2445}{29} =$

$\therefore$ La ecuación buscada es:

$$\boxed{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\frac{2445}{29}}$$

⑤ La esfera con diámetro AB debe tener obviamente centro en el punto medio de A y B y radio igual a $\frac{1}{2} d(A,B)$. esto es:

centro: $C = \frac{1}{2}\left[(2,0,0)+(0,2,0)\right] = (1,1,0)$,

y radio: $R = \frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2}$ o bien

$R^2 = \frac{8}{4} = 2$.

$\Rightarrow$ La ecuación de esta esfera es

$$(x-1)^2+(y-1)^2+z^2 = 2.$$

Por otro lado la ecuación de la recta que pasa por C y D en forma vectorial está dada por

$$\bar{P} = C + t(C-D) \; ; \; t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \bar{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = 2t+2 \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación de la esfera para encontrar las posibles intersecciones tenemos;

$$2(2t-1)^2+(2t+2)^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{2}(4t^2-4t+1)+(\overset{2}{\cancel{4}}t^2+\overset{4}{\cancel{8}}t+\overset{2}{\cancel{4}})-\overset{-1}{\cancel{2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$6t^2 = -2$ arghhh! No hay puntos reales de intersección!