Geometría Analítica II

EXAMEN 1

Profesor: Pablo Barrera Día 1 de marzo, 2005

NOMBRE: Mendoza Luna Luis Guillermo.

Resuelva adecuadamente los siguientes ejercicios.

1. Encuentre la ecuación del plano determinado por la recta de intersección de los planos

$$\Pi_1 : 2x + 3y - 4z = 2,$$
$$\Pi_2 : 4x - 3y - 2z = 5,$$

   y el punto $P_0(1,2,3)$.

2. Describa la ecuación del plano que pasa por los puntos $P_1(0,2,-2), P_2(2,-2,3)$ y $P_3(6,-1,4)$.

3. Calcule la distancia entre las rectas

$$\mathcal{L}_1 : P(\alpha) = P_0(0,0,0) + \alpha\vec{a}(1,1,0),$$
$$\mathcal{L}_2 : Q(\beta) = P_1(0,0,2) + \beta\vec{b}(1,-2,3).$$

4. Encuentre el área del triángulo $\triangle$ determinado por los puntos $P_1(1,-1,0)$, $P_2(1,1,1)$ y $P_3(1,0,1)$.

5. Encuentre la ecuación del plano tangente a la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

   en el punto (x_0, y_0, z_0).

6. Calcule el centro de la esfera que pasa por los vértices del tetraedro descrito por lo puntos $P_0(0,0,0)$, $P_1(1,0,0)$, $P_2(0,1,0)$ y $P_3(0,0,1)$.

Nota: Argumente adecuadamente su respuesta; no serán tomadas en cuenta observaciones o señalamientos que realicen, sin su debida justificación.

1. La familia de planos que pasa por la recta dada es

$$k_1(2x+3y-4z-2)+k_2(4x-3y-2z-5)=0$$

$$\Leftrightarrow (2k_1+4k_2)x+(3k_1-3k_2)y+(-4k_1-2k_2)z-2k_1-5k_2=0$$

Como $P_0(1,2,3)$ pertenece al plano que buscamos,

$$(2k_1+4k_2)+(3k_1-3k_2)2+(-4k_1-2k_2)3-2k_1-5k_2=0$$

$$\Leftrightarrow (2k_1+6k_1-12k_1-2k_1)+(4-6-6-5)k_2=0$$

$$\Leftrightarrow -6k_1-13k_2=0 \Rightarrow k_1=\frac{-13}{6}k_2.$$

Entonces, si escogemos $k_2=1$ en particular, el plano buscado es de la forma

$$\frac{-13}{6}(2x+3y-4z-2)+4x-3y-2z-5=0$$

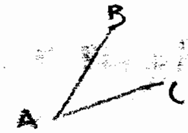
$$\Rightarrow -13(2x+3y-4z-2)+24x-18y-12z-30=0$$

$$\Rightarrow -26x-39y+52z+26+24x-18y-12z-30=0$$

$$\Rightarrow -2x-57y+40z-4=0$$

es la ecuación del plano buscado.

2. La ecuación del plano que pasa por $A(0,2,-2)$, $B(2,-2,3)$, $C(6,-1,4)$.



Formemos los vectores $\vec{AB}=(2,-4,5)$, $\vec{AC}=(6,-3,6)$. Sea P un punto cualquiera del plano y formemos $\vec{AP}=(x,y-2,z+2)$

Podemos escribir la combinación lineal $\vec{AP}=\alpha\vec{AB}+\beta\vec{AC}$ puesto que $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ no son paralelos. $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$

$$\Rightarrow (x,y-2,z+2)=\alpha(2,-4,5)+\beta(6,-3,6)=(2\alpha+6\beta,-4\alpha-3\beta,5\alpha+6\beta)$$

$$\Rightarrow x=2\alpha+6\beta \quad \Rightarrow -4+2y+x=-6\alpha \quad \Rightarrow \alpha=\frac{-4+2y+x}{-6}$$
$$-2+y=-4\alpha-3\beta$$

y del mismo modo $\beta=\dfrac{x-2\alpha}{6}=\dfrac{x-2\left(\frac{-4+2y+x}{-6}\right)}{6}$

$$=\frac{x+\frac{-4+2y+x}{3}}{6}=\frac{x}{6}+\frac{-4+2y+x}{18}=\frac{4x+2y-4}{18}$$

$=\dfrac{2x+y-2}{9}$ al resolver para α y β en términos de x y y.

Sustituyendo en la tercera relación:

$$z+2=5\left(\frac{-4+2y+x}{-6}\right)+\frac{6}{9}(2x+y-2)$$

$$\Rightarrow 9(z+2)=\frac{5\cdot 9}{6}(4-x-2y)+6(2x+y-2)$$

$$\Rightarrow 9z+18 = \frac{15}{2}(4-x-2y)+12x+6y+12$$

$$\Rightarrow 18z+36 = 60-15x-30y+24x+12y+24$$

$$\Leftrightarrow \quad 9x-18y+46-46-18z=0$$

$$\Rightarrow \quad 9x-18y-18z=0 \Rightarrow x-2y-2z=0$$

es la ecuación del plano en forma implícita.

3. $\mathcal{L}_1$ tiene vector $(1,1,0)$ de dir. $P(\alpha)=(\alpha,\alpha,0)$

$\mathcal{L}_2$ tiene vector de dir. $(1,-2,3)$. $\quad Q(\beta)=(\beta,-2\beta,3\beta+2)$

Formemos $w(\alpha,\beta)=(\beta-\alpha,-2\beta-\alpha,3\beta+2)$ de $\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{L}_2$. Buscamos α^*, β^* tales que

$$w(\alpha^*,\beta^*)\cdot(1,1,0)=0 \qquad w(\alpha^*,\beta^*)\cdot(1,-2,3)=0$$

$$\Leftrightarrow \beta^*-\alpha^*-2\beta^*-\alpha^*=0 \; ; \; \beta^*-\alpha^*+2(+2\beta^*+\alpha^*)+3(3\beta^*+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\beta^*-2\alpha^*=0, \quad 14\beta^*+\alpha^*=-6$$

Resolviendo,

$$\beta^*=-2\alpha^*, \quad 14(-2\alpha^*)+\alpha^*=-6 \Rightarrow -27\alpha^*=-6$$

$$\Rightarrow \alpha^*=6/27, \quad \beta^*=-12/27.$$

Entonces

$$w(\alpha^*,\beta^*)=\left(-\frac{18}{27}, -2\left(-\frac{12}{27}\right)-\frac{6}{27}, 3\left(-\frac{12}{27}\right)+2\right)$$

$$=\left(-\frac{18}{27}, \frac{24-6}{27}, -\frac{36}{27}+\frac{54}{27}\right)=\left(-\frac{18}{27}, \frac{18}{27}, \frac{18}{27}\right)$$

La distancia buscada es $|w(\alpha^*,\beta^*)|$

$$= \sqrt{3\left(\frac{18}{27}\right)^2} = \frac{18}{27}\sqrt{3}$$

4. Formemos los vectores $v = \overrightarrow{P_1P_2} = (0,2,1)$, $w = \overrightarrow{P_1P_3} = (0,1,1)$

De las propiedades del producto cruz, $|w \times v|$ es el área del paralelogramo de lados w, v, así que el área buscada es $\frac{1}{2}|w \times v|$.

Tenemos $w \times v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} k$

$= (1,0,0)$

Entonces, $|w \times v| = 1$

$\therefore$ El área buscada es $\frac{1}{2}|w \times v| = 1/2$

5. Conocemos el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ del plano. Además, el vector $\overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0)$ es un vector normal al plano, ya que el vector que va del centro de la esfera al punto de tangencia con el plano es ortogonal al plano. Entonces si $P(x,y,z)$ es un punto cualquiera del plano:

$$(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$\Rightarrow x x_0 - x_0^2 + y y_0 - y_0^2 + z z_0 - z_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow x x_0 + y y_0 + z z_0 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = 0$$

es la ecuación del plano tangente a la esfera en (x_0, y_0, z_0)

6. Los puntos son $P_0(0,0,0)$, $P_1(1,0,0)$, $P_2(0,1,0)$, $P_3(0,0,1)$

Si C es el centro de la esfera,

$\|C-P_0\| = \|C-P_1\| = \|C-P_2\| = \|C-P_3\|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_c^2+y_c^2+z_c^2} = \sqrt{(x_c-1)^2+y_c^2+z_c^2} = \sqrt{x_c^2+(y_c-1)^2+z_c^2} = \sqrt{x_c^2+(y_c)^2+(z_c-1)^2}$$

Utilizando la primera igualdad y simplificando:

$x_c^2 = x_c^2 - 2x_c + 1 \Rightarrow 2x_c = 1 \Rightarrow x_c = 1/2$.

Con el 1^er^ y 3^er^ términos,

$y_c^2 = y_c^2 - 2y_c + 1 \Rightarrow 2y_c = 1 \Rightarrow y_c = 1/2$.

Con el 1^er^ y 4° términos,

$z_c^2 = z_c^2 - 2z_c + 1 \Rightarrow z_c = 1/2$.

$\therefore$ El centro de la esfera es $(1/2, 1/2, 1/2)$.