1. Encuentre la ec. del plano determinado por la recta de intersección de los planos

$$\pi_1 : 2x + 3y - 4z = 2$$
$$\pi_2 : 4x - 3y - 2z = 5$$

y el pto. $P_0(1,2,3)$

La ec. de los planos que pasan por $l_{12} = \pi_1 \cap \pi_2$ está dada por:

$$k_1 \pi_1 + k_2 \pi_2 = 0$$

como P_0 está en algun plano de esta familia se satisface:

$$k_1 \pi_1 (1,2,3) + k_2 \pi_2 (1,2,3) = 0$$

$$\Rightarrow k_1 (2+6-12-2) + k_2 (4-6-6-5) = 0$$

$$-6k_1 - 13k_2 = 0 \quad (i)$$

para ciertos k_1 y k_2. Haciendo $k_1 = 13$ y $k_2 = -6$, se satisface (i)

$\Rightarrow$ la ec. del plano π_0, está dada por: i.e.

$$13\pi_1 - 6\pi_2 = 0$$

$$13(2x + 3y - 4z - 2) - 6(4x - 3y - 2z - 5) = 0$$

$$2x + 57y - 40z + 4 = 0$$

2. Describa la ec. del plano que pasa por los ptos. $P_1(0,2,-2)$, $P_2(2,-2,3)$ y $P_3(6,-1,4)$

Tomando a P_1 como pto. de referencia y a P_1P_2 y P_1P_3 como los vectores bases, se obtiene:

$$P_1P_2 = P_2 - P_1 = (2,-2,3) - (0,2,-2) = (2,-4,5)$$
$$P_1P_3 = P_3 - P_1 = (6,-1,4) - (0,2,-2) = (6,-3,6)$$

$\Rightarrow$ cualquier vector P_1P se puede expresar como combinación lineal de P_1P_2 y P_1P_3, i.e.

$$P_1P = \alpha P_1P_2 + \beta P_1P_3$$
$$(P - P_1) = \alpha(2,-4,5) + \beta(6,-3,6)$$

$P = (0,2,-2) + \alpha(2,-4,3) + \beta(6,-8,6)$

lo que da la la rep. explicita del plano

3. Calcule la distancia entre las rectas

$$\ell_1 : P(\alpha) = P_0(0,0,0) + \alpha\, \bar{a}(1,1,0)$$
$$\ell_2 : Q(\beta) = P_1(0,0,2) + \beta\, \bar{b}(1,-2,3)$$

la distancia $d(\ell_1,\ell_2) = \min\limits_{\substack{P\in\ell_1\\ Q\in\ell_2}} (P,Q) = d(P^*,Q^*)$

Si consideramos los vectores $W = P - Q$, se observa que $d(P^*,Q^*) = \|W^*\|$ con $W^* = P^* - Q^*$

$\Rightarrow$ tenemos que $W = P(\alpha) - Q(\beta)$

$$= (0,0,0) + \alpha(1,1,0) - (0,0,2) - \beta(1,-2,3)$$
$$= (\alpha-\beta,\ \alpha+2\beta,\ -2-3\beta)$$

se busca que $W^* \perp \ell_1$ y $W^* \perp \ell_2$, i.e.

(i) $W^* \cdot \bar{a} = 0$ y (ii) $W^* \cdot \bar{b} = 0$

$\Rightarrow$(i) $\alpha^* - \beta^* + \alpha^* + 2\beta^* = 0$

(ii) $\alpha^* - \beta^* - 2\alpha^* - 4\beta^* - 6 - 9\beta^* = 0$

Reduciendo

(i) $2\alpha^* + \beta^* = 0$

(ii) $-\alpha^* - 14\beta^* = 6$

Resolviendo el sistema:

$$-14\beta^* - 6 = \alpha^*$$
$$2(-14\beta^* - 6) + \beta^* = 0$$
$$-27\beta^* - 12 = 0$$
$$\beta^* = 12/-27 = -4/9$$

$\Rightarrow \alpha^* = 2/9$

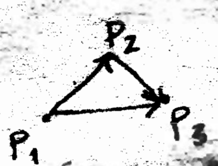
$\Rightarrow W^* = (2/3, -2/3, -2/3)$

Por lo que $d(\ell_1,\ell_2) = d(P^*,Q^*) = \|W^*\| =$

$$\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

4) Encuentre el área del Δ determinado por los ptos. $P_1(1,-1,0)$, $P_2(1,1,1)$ y $P_3(1,0,1)$

Considerar los vectores:



$\bar{a} = P_1P_2 = (1,1,1) - (1,-1,0) = (0,2,1)$

$\bar{b} = $ [illegible] $P_3 = (1,1,1) - (1,0,1) = (0,1,0)$

el área del paralelógramo que forman está dada por $\|\bar{a}\times\bar{b}\|$, luego

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$= (-1, 0, 0)$$

$\Rightarrow$ A. paralelogramo $= \|\bar{a}\times\bar{b}\| = 1$

luego, el área del $\Delta P_1P_2P_3$ está dada por la mitad del área del paralelógramo que forman $\bar{a}$ y $\bar{b}$, i.e.

$$A(\Delta) = \frac{1}{2}\|\bar{a}\times\bar{b}\| = \frac{1}{2}$$

6. Calcule el centro de la esfera que pasa por los vértices del tetraedro descrito por los ptos. $P_0(0,0,0)$, $P_1(1,0,0)$, $P_2(0,1,0)$ y $P_3(0,0,1)$

El gravicentro de un tetraedro es el punto de intersección de las líneas que unen de los ptos. medios de las aristas [illegible] opuesto, además bisecta a estas líneas. Por lo que el gravicentro es el centro de la esfera que pasa por los vértices.

P_0P_1 es la arista opuesta
de P_2P_3. El pto. medio de
P_0P_1 es:

$$A = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_0$$

El pto. medio de P_2P_3 es

$$B = \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_3$$

luego como el gravicentro $\bar{G}$ biseca la recta a la que pertenece AB:

$$\bar{G} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$$

en términos de P_0, P_1, P_2, P_3:

$$\bar{G} = \frac{\left(\frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_0\right) + \left(\frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_3\right)}{2}$$

$$\bar{G} = \frac{1}{4}P_0 + \frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{4}P_2 + \frac{1}{4}P_3$$

$\Rightarrow$ el centro de la esfera del tetraedro

$$\bar{G} = \frac{1}{4}(0,0,0) + \frac{1}{4}(1,0,0) + \frac{1}{4}(0,1,0) + \frac{1}{4}(0,0,1)$$

$$= \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

5. Encuentre la ec. del plano tangente a la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

en el pto. (x_0, y_0, z_0)

Si consideramos la ec.

$$S_p : x \cdot x_p + y \cdot y_p + z \cdot z_p = 1$$

con $x_p = x_0$; $y_p = y_0$ y $z_p = z_0$; $x_0 x + y_0 y + z_0 z - 1 = 0$

la ec. S_p es la ec del plano tangente a la esfera en P_0.

<u>Dem.</u>

Si tomamos el vector que va del origen (centro de la esfera) a P_0:

$$OP_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

este es paralelo al vector n, (normal al plano) pues

$$(x_0, y_0, z_0) = n = (x_0, y_0, z_0)$$

$\therefore$ OP_0, un radio de la esfera, es perpendicular al plano $S_p : x_0 x + y_0 y + z_0 z - 1 = 0$