Patricia A. Vélez Mellado

Geometría Analítica II

Considerar los ptos. $P_0(0,-1)$, $P_1(2,0)$ y $P_2(-1,1)$:

el vector $\overrightarrow{P_0P}$, ~~donde~~ P es cualquier pto. (x,y), puede expresarse como:

$$\overline{P_0P} = \overline{P_0O} + \overline{OP}$$
$$= (0,1) + (x,y)$$
$$= (x, 1+y)$$

Pero $\overline{P_0P}$ también puede verse como combinación lineal de P_0P_1 y P_0P_2, con:

$$\overline{P_0P_1} = (2,1) \quad \text{y} \quad \overline{P_0P_2} = (-1,2)$$

$$\Rightarrow \overline{P_0P} = \alpha(2,1) + \beta(-1,2)$$
$$= (2\alpha, \alpha) + (-\beta, 2\beta) = (x, y+1)$$

igualando componentes:

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= 2\alpha - \beta \\ y &= \alpha + 2\beta - 1 \end{aligned}$$

la expresión anterior permite, dados α y β obtener x y y.

Por otro lado, si se desea conocer a α y β dados x y y, se resuelve el sistema

$$\begin{aligned} x &= 2\alpha - \beta \\ y &= \alpha + 2\beta - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x &= 4\alpha \\ y &= \alpha - 1 \end{aligned}$$

$$2x + y = 5\alpha - 1$$

$$\alpha = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}$$

$$\beta = 2\alpha - x = 2\left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}\right) - x$$
$$= -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{2}{5}$$

(i) Se obtiene

(ii) $\alpha = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}$

$$\beta = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{2}{5}$$

(ii) da los valores de α y β conocidos x y y

Considerar $Q_0 = (2,2)$; $Q_1(-1,4)$; $Q_2(0,-3)$
se ~~busca~~ transformar:

$$\{P_0, P_1, P_2\} \rightarrow \{Q_0, Q_1, Q_2\}$$

El vector $\overrightarrow{Q_0P}$, con $P(x,y)$ se puede expresar como

$$\overrightarrow{Q_0P} = \overrightarrow{Q_0O} + \overrightarrow{OP}$$
$$= (-2,-2) + (x,y) = (x-2, y-2)$$

Pero, $\overrightarrow{Q_0P}$ también puede expresarse como combinación lineal de $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ y $\overrightarrow{Q_0Q_2}$

$$\overrightarrow{Q_0P} = (x-2, y-2) = \alpha_1 \overrightarrow{Q_0Q_1} + \beta_1 \overrightarrow{Q_0Q_2}$$
$$= \alpha_1(-3,2) + \beta_1(-2,-5)$$
$$= (-3\alpha_1, 2\alpha_1) + (-2\beta_1, -5\beta_1)$$
$$(x-2, y-2) = (-3\alpha_1 - 2\beta_1 \,;\, 2\alpha_1 - 5\beta_1)$$

igualando componentes:

$$x = -3\alpha_1 - 2\beta_1 + 2$$
$$y = 2\alpha_1 - 5\beta_1 + 2$$

Se busca transformar $\{P_0, P_1, P_2\} \to \{Q_0, Q_1, Q_2\}$, la expresión anterior permite obtener x, y dados α_1 y β_1. Así que sust. en (ii):

$$\alpha = \frac{2}{5}(-3\alpha_1 - 2\beta_1 + 2) + \frac{1}{5}(2\alpha_1 - 5\beta_1 + 2) + \frac{1}{5}$$

$$\alpha = -\frac{4}{5}\alpha_1 - \frac{9}{5}\beta_1 + \frac{7}{5}$$

Para β:

$$\beta = -\frac{1}{5}(-3\alpha_1 - 2\beta_1 + 2) + \frac{2}{5}(2\alpha_1 - 5\beta_1 + 2) + \frac{2}{5}$$

$$\beta = \frac{7}{5}\alpha_1 - \frac{8}{5}\beta_1 + \frac{4}{5}$$

Se obtiene

$$\text{(iii)} \quad \alpha = -\frac{4}{5}\alpha_1 - \frac{9}{5}\beta_1 + \frac{7}{5}$$

$$\beta = \frac{7}{5}\alpha_1 - \frac{8}{5}\beta_1 + \frac{4}{5}$$

transforma de $\{Q_0, Q_1, Q_2\} \to \{P_0, P_1, P_2\}$

Para obtener $\{P_0, P_1, P_2\} \to \{Q_0, Q_1, Q_2\}$ se resuelve el sistema formado de (iii) con respecto a α_1 y β_1

$$7\alpha = -\frac{28}{5}\alpha_1 - \frac{63}{5}\beta_1 + \frac{49}{5}$$

$$4\beta = \frac{28}{5}\alpha_1 - \frac{32}{5}\beta_1 + \frac{16}{5}$$

$$7\alpha + 4\beta = -\frac{95}{5}\beta_1 + \frac{65}{5}$$

$$7\alpha + 4\beta = -19\beta_1 + 13$$

$$\beta_1 = -\frac{7}{19}\alpha - \frac{4}{19}\beta + \frac{13}{19}$$

$$\alpha = -\frac{4}{5}\alpha_1 - \frac{9}{5}\left(-\frac{7}{19}\alpha - \frac{4}{19}\beta + \frac{13}{19}\right) + \frac{7}{5}$$

$$\alpha = -\frac{4}{5}\alpha_1 + \frac{63}{95}\alpha + \frac{36}{95}\beta - \frac{117}{95} + \frac{7}{5}$$

$$\frac{4}{5}\alpha_1 = -\frac{32}{95}\alpha + \frac{36}{95}\beta + \frac{16}{95}$$

$$\alpha_1 = -\frac{8}{19}\alpha + \frac{9}{19}\beta + \frac{4}{19}$$

Se obtiene

(iv) $\alpha_1 = -\frac{8}{19}\alpha + \frac{9}{19}\beta + \frac{4}{19}$

$\beta_1 = -\frac{7}{19}\alpha - \frac{4}{19}\beta + \frac{13}{19}$

Que permite transformar $\{P_0, P_1, P_2\} \to \{Q_0, Q_1, Q_2\}$

$\rightsquigarrow$ Considerar $P_0(0,1)$; $P_1(1,0)$; $P_2(1,3)$ y

$Q_0(3,0)$; $Q_1(2,1)$; $Q_2(5,0)$

Transformar $\{P_0, P_1, P_2\} \to \{Q_0, Q_1, Q_2\}$

$\to$ El vector $\overrightarrow{P_0P}$, con $P(x,y)$, puede expresarse como

$$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{P_0O} + \overrightarrow{OP}$$
$$= (0,-1) + (x,y) = (x, y-1)$$

Pero, también puede expresarse como combinación lineal de P_0P_1 y P_0P_2:

$$\overrightarrow{P_0P} = (x, y-1) = \alpha(1,-1) + \beta(1,2)$$
$$= (\alpha, -\alpha) + (\beta, 2\beta)$$
$$= (\alpha+\beta, -\alpha+2\beta)$$

Igualando componentes:

(i) $x = \alpha + \beta$
$y = -\alpha + 2\beta + 1$

i.e. se obtiene una expresión en las que dados α y β se pueden conocer x, y.

→ Para obtener la expresión conversa, se resuelve el sistema dado por (i) con respecto a α y β:

$$x = \alpha + \beta$$
$$y = -\alpha + 2\beta + 1$$
$$x + y = 3\beta + 1$$

$$\beta = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$$

$$\alpha = x - \beta = x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$$

Resulta:

(ii):
$$\alpha = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$$

$$\beta = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$$

→ Considerar los ptos Q_0, Q_1 y Q_2:
el Q_0P, $P(x,y)$, puede expresarse:

$$\overrightarrow{Q_0P} = \overrightarrow{Q_0O} + \overrightarrow{OP}$$
$$= (-3,0) + (x,y) = (-3+x, y)$$

$\overrightarrow{Q_0P}$ también se puede ver como combinación lineal de Q_0Q_1 y Q_0Q_2:

$$\overrightarrow{Q_0P} = (-3+x, y) = \alpha_1(-1, 1) + \beta_1(2, 0)$$
$$= (-\alpha_1, \alpha_1) + (2\beta_1, 0)$$

igualando componentes:

(ii) $x = -\alpha_1 + 2\beta_1 + 3$
$y = \alpha_1$

(ii) permite obtener x, y dados α_1, β_1. La expresión conversa se obtiene resolviendo el sistema:

$$x = -\alpha_1 + 2\beta_1 + 3$$
$$y = \alpha_1$$

$\alpha_1 = y$

$$x = -y + 2\beta_1 + 3$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$$

Resulta:

(iv) $\alpha_1 = y$
$\beta_1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$

Se busca $\{P_0, P_1, P_2\} \to \{Q_0, Q_1, Q_2\}$. Sust (i) en (iv):

$$\alpha_1 = -\alpha + 2\beta + 1$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}(-\alpha + 2\beta + 1) - \frac{3}{2}$$

$$\beta_1 = \cancel{\frac{1}{2}\alpha} + \frac{1}{2}\beta - \cancel{\frac{1}{2}\alpha} + \beta + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$$

$$\beta_1 = \frac{3}{2}\beta - 1$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 = -\alpha + 2\beta + 1$$
$$\beta_1 = \frac{3}{2}\beta - 1$$

lo que da la expresion buscada. La expresión inversa se obtiene resolviendo el sistema para α y β.

$$\beta = \frac{2}{3}\beta_1 + \frac{2}{3}$$

$$\alpha = -\alpha_1 + 2\left(\frac{2}{3}\beta_1 + \frac{2}{3}\right) + 1$$

$$\alpha = -\alpha_1 + \frac{4}{3}\beta_1 + \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = -\alpha_1 + \frac{4}{3}\beta_1 + \frac{7}{3}$$

$$\beta = \frac{2}{3}\beta_1 + \frac{2}{3}$$

esta última expresión transforma

$$\{Q_0, Q_1, Q_2\} \to \{P_0, P_1, P_2\}$$