Geometría Analítica 2

Mendoza Luna Luis Guillermo. Trabajo 8

1) Si en un sistema de coordenadas A escribimos

$$\alpha = -\frac{4}{5}\alpha_1 - \frac{9}{5}\beta_1 + \frac{7}{5} \qquad \beta = \frac{7}{5}\alpha_1 - \frac{8}{5}\beta_1 + \frac{4}{5}$$

para α_1, β_1 de un sistema de coordenadas B, expresa α_1, β_1 en términos de α, β.

Reescribimos las ecuaciones anteriores como

$$-\frac{4}{5}\alpha_1 - \frac{9}{5}\beta_1 = \alpha - \frac{7}{5} \qquad \frac{7}{5}\alpha_1 - \frac{8}{5}\beta_1 = \beta - \frac{4}{5}$$

Entonces, según la regla de Cramer

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha - 7/5 & -9/5 \\ \beta - 4/5 & -8/5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4/5 & -9/5 \\ 7/5 & -8/5 \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{8}{5}\alpha + \frac{56}{25} - \left(-\frac{9}{5}\beta + \frac{36}{25}\right)}{\frac{32}{25} + \frac{63}{25}}$$

$$= \frac{-\frac{8}{5}\alpha + \frac{9}{5}\beta + \frac{56-36}{25}}{\frac{95}{25}} = -\frac{40}{95}\alpha + \frac{45}{95}\beta + \frac{20}{95} =$$

$$-\frac{8}{19}\alpha + \frac{9}{19}\beta + \frac{4}{19}$$

$$\beta_1 = \frac{\begin{vmatrix} -4/5 & \alpha - 7/5 \\ 7/5 & \beta - 4/5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4/5 & -9/5 \\ 7/5 & -8/5 \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{4}{5}\beta + \frac{16}{25} - \left(\frac{7}{5}\alpha - \frac{49}{25}\right)}{\frac{32}{25} + \frac{63}{25}}$$

$$= \frac{-\frac{7}{5}\alpha - \frac{4}{5}\beta + \frac{16+49}{25}}{\frac{95}{25}} = -\frac{35}{95}\alpha - \frac{20}{95}\beta + \frac{65}{95} = -\frac{7}{19}\alpha - \frac{4}{19}\beta + \frac{13}{19}.$$

Tomemos los sistemas de coordenadas definidos por $\{P_0(0,1), P_1(1,0), P_2(1,3)\}$ y $\{Q_0(3,0), Q_1(2,1), Q_2(5,0)\}$. Expresa cada sistema en términos del otro.

Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano. Entonces

$$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{P_0O} + \overrightarrow{OP} = (0,-1) + (x,y) = (x, y-1)$$

$$\overrightarrow{P_0P_1} = (1,-1)$$

$$\overrightarrow{P_0P_2} = (1,2)$$

Sabemos que $\overrightarrow{P_0P} = \alpha \overrightarrow{P_0P_1} + \beta \overrightarrow{P_0P_2} \Rightarrow (x, y-1) = (\alpha, -\alpha) + (\beta, 2\beta) = (\alpha+\beta, -\alpha+2\beta)$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x = \alpha+\beta \\ y = 1-\alpha+2\beta \end{array} \Rightarrow x+y = 1+3\beta \Rightarrow \beta = \frac{x+y-1}{3}$$

Y además, $\alpha = x - \beta = x - \dfrac{x+y-1}{3} = \dfrac{2x-y+1}{3}$

Con esto hemos expresado las coordenadas α, β de la base $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\}$ en términos de x, y

Ahora vamos a considerar la base $\{\overrightarrow{Q_0Q_1}, \overrightarrow{Q_0Q_2}\}$. Tenemos:

$$\overrightarrow{Q_0P} = \overrightarrow{Q_0O} + \overrightarrow{OP} = (-3,0) + (x,y) = (x-3, y)$$

$$\overrightarrow{Q_0Q_1} = (-1,1)$$

$$\overrightarrow{Q_0Q_2} = (2,0)$$

Como $\overrightarrow{Q_0P} = \gamma \overrightarrow{Q_0Q_1} + \delta \overrightarrow{Q_0Q_2} \Leftrightarrow (x-3, y) = \gamma(-1,1) + \delta(2,0) = (-\gamma, \gamma) + (2\delta, 0)$

$$= (-\gamma + 2\delta, \gamma)$$

$$\Rightarrow x = 3 - \gamma + 2\delta, \quad y = \gamma$$

Con esto tenemos x y y expresados en términos de las coordenadas γ, δ de la base $\{\overrightarrow{Q_0Q_1}, \overrightarrow{Q_0Q_2}\}$

Sustituyendo estas expresiones para x y y en las que están involucradas α, β, tenemos

$$\alpha = \frac{2(3-\gamma+2\delta) - \gamma + 1}{3} = \frac{7-3\gamma+4\delta}{3}, \quad \beta = \frac{3-\gamma+2\delta+\gamma-1}{3} = \frac{2+2\delta}{3}$$

Mendoza Luna Luis Guillermo.

Así, pues, hemos expresado las coordenadas α, β de la base $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\}$ en términos de la base $\{\overrightarrow{Q_0Q_1}, \overrightarrow{Q_0Q_2}\}$.

Para invertir los papeles, despejamos γ y δ de las ecuaciones anteriores:

$$-3\gamma + 4\delta = 3\alpha - 7$$

$$2\delta = 3\beta - 2$$

$$\Rightarrow -3\gamma = -6\beta + 4 - 7 + 3\alpha \Rightarrow \gamma = \frac{3\alpha - 3 - 6\beta}{-3} = -\alpha + 2\beta + 1$$

$$\delta = \frac{3}{2}\beta - 1$$