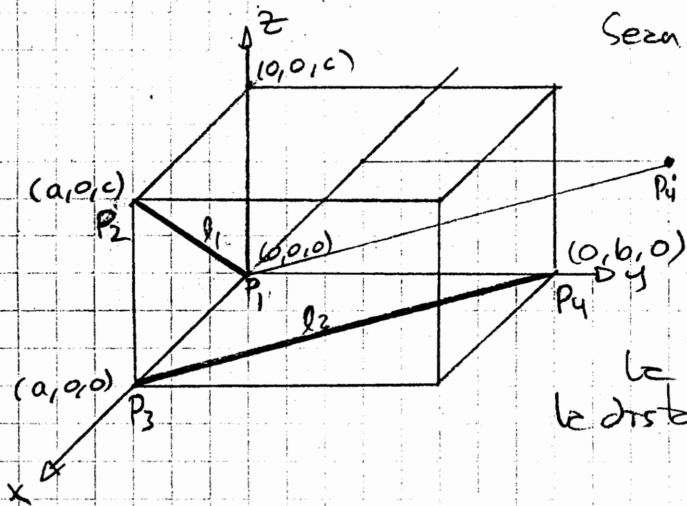
Cruz Rodríguez José Luis

No. Cuenta: 40504958-3

25.02.05

Trabajo

Considerando la figura, encontrar la distancia entre la diagonal formada por los puntos $(a,0,0)$ y $(0,b,0)$, y la diagonal formada por los puntos $(0,0,0)$ y $(a,0,c)$



Sean l_1 y l_2 las diagonales

$l_1 = \overrightarrow{P_1P_2}$, $l_2 = \overrightarrow{P_3P_4}$

con $P_1\,(0,0,0)$
$P_2\,(a,0,c)$
$P_3\,(a,0,0)$
$P_4\,(0,b,0)$

La distancia entre l_1 y l_2, es la distancia más corta entre ellas.

Consideremos un punto $p \in l_1$ y un punto $q \in l_2$, entonces sea

$$p = \alpha P_2 = \alpha(a,0,c)$$

y $q = P_3 + \beta P_4'$, con $P_4' = (-a,b,0)$

$$q = (a,0,0) + \beta(-a,b,0)$$

considerando el vector $\overline{pq} = q - p = (a,0,0) + \beta(-a,b,0) - \alpha(a,0,c)$

$$= (a - \beta a - \alpha a,\ \beta b,\ -\alpha c)$$
$$= (a(1-\beta-\alpha),\ \beta b,\ -\alpha c)$$

Si tomamos el vector $\overline{pq}$ como la distancia más corta entre l_1 y l_2, entonces $\overline{pq}$ debe ser ortogonal a ambas rectas, o sea $\overline{pq}$ debe ser ortogonal a $(a,0,c)$ y a $(-a,b,0)$, entonces

$$\overline{pq}\cdot(a,0,c) = 0$$
$$(a(1-\beta-\alpha),\beta b,-\alpha c)\cdot(a,0,c) = a^2(1-\beta-\alpha) - \alpha c^2 = 0 \quad — (1)$$
$$\overline{pq}\cdot(-a,b,0) = 0$$
$$(a(1-\beta-\alpha),\beta b,-\alpha c)\cdot(-a,b,0) = -a^2(1-\beta-\alpha) + \beta b^2 = 0 \quad — (2)$$

(1) —
$$a^2 - a^2\beta - a^2\alpha - \alpha c^2 = 0$$
$$\alpha(-a^2 - c^2) - a^2\beta + a^2 = 0$$
$$\alpha(a^2+c^2) + a^2\beta - a^2 = 0$$

(2) — $-a^2 + a^2\beta + a^2\alpha + \beta b^2 = 0$

$$a^2\alpha + \beta(a^2+b^2) - a^2 = 0$$

Resolviendo el sistema.

De (1)

$$\alpha = \frac{a^2 - a^2\beta}{a^2+c^2}$$

Sust. en (2)

$$a^2\left(\frac{a^2-\beta a^2}{a^2+c^2}\right) + \beta(a^2+b^2) - a^2 = 0$$

$$a^2(a^2-\beta a^2) + \beta(a^2+b^2)(a^2+c^2) - a^2(a^2+c^2) = 0$$

$$\cancel{a^4} - a^4\beta + \beta(a^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) - \cancel{a^4} - a^2c^2 = 0$$

$$\beta(-a^4+a^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) = a^2c^2$$

$$\beta = \frac{a^2c^2}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$$

Sust. en α

$$\alpha = \frac{a^2 - a^2\left(\frac{a^2c^2}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}\right)}{a^2+c^2}$$

$$\alpha = \frac{a^2c^2}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{pq} = \frac{1}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}(b^2c^2a,\ a^2c^2b,\ -a^2b^2c)$$

$$= \frac{abc}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}(bc,\ ac,\ -ab)$$

$\therefore$ la distancia entre l_1 y l_2 es

$$\|\overline{pq}\| = \frac{abc}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}$$

$$= \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}$$