Geometría Analítica II Trabajo 6

Juan Salvador Gar[redacted] Ledesma

23/feb./2005

Dados los puntos $P_1(0,-1,1)$, $P_2(1,2,-3)$ y $P_3(4,4,200)$, encuentre la ecuación implícita del plano que pasa por esos puntos, y muestre que para cualquier α_1, α_2, el punto $P(x,y,z)$ de la forma

$$*: P = (1-\alpha_1-\alpha_2)P_1 + \alpha_1 P_2 + \alpha_2 P_3$$ es un punto del plano.

Escribamos en $*$ a los puntos dados P_1, P_2, P_3:

$$P = (1-\alpha_1-\alpha_2)(0,-1,1) + \alpha_1(1,2,-3) + \alpha_2(4,4,200)$$

$$\Leftrightarrow P = (0, \alpha_1+\alpha_2-1, 1-\alpha_1-\alpha_2) + (\alpha_1, 2\alpha_1, -3\alpha_1) + (4\alpha_2, 4\alpha_2, 200\alpha_2)$$

$$\Leftrightarrow P = (\alpha_1+4\alpha_2, 3\alpha_1+5\alpha_2-1, 1-4\alpha_1+199\alpha_2)$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 + 4\alpha_2 \\ y+1 &= 3\alpha_1 + 5\alpha_2 \\ z-1 &= -4\alpha_1 + 199\alpha_2 \end{aligned}\right\} \cdots (1)$$

Si vemos las primeras dos ecuaciones de (1) como un sistema lineal para α_1, α_2 y resolvemos obtendremos estos dos parámetros en función de x e y, así al sustituirlos en la tercer ecuación obtendremos una ecuación de la forma $Ax+By+Cz+D=0$, que como sabemos representa geométricamente un plano Π, el cual, probaremos que contiene a $\{P_1, P_2, P_3\}$.

$x = \alpha_1 + 4\alpha_2$

$y+1 = 3\alpha_1 + 5\alpha_2$

le asociamos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & x \\ 3 & 5 & y+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & x \\ 0 & -7 & -3x+y+1 \end{pmatrix}$$

luego $\alpha_2 = \frac{1}{7}(3x-y-1)$

$$\alpha_1 = x - 4\alpha_2 = x - \frac{4}{7}(3x-y-1) = \frac{1}{7}(-5x+4y+4)$$

reemplazando en la tercer ecuación de (1) los valores obtenidos tenemos:

$$z-1 = \frac{4}{7}(5x-4y-4) + \frac{199}{7}(3x-y-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7z-7 = 20x-16y-16+597x-199y-199 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 617x - 215y - 7z - 208 = 0 \;\ldots\; (\Pi)$$

Como señalamos antes esta última ecuación determina un plano, en el cual están los puntos P_1, P_2 y P_3 ya que se cumple:

$$617(0) - 215(-1) - 7(1) - 208 = 0 \Leftrightarrow P_1 \in \Pi$$
$$617(1) - 215(2) - 7(-3) - 208 = 0 \Leftrightarrow P_2 \in \Pi$$
$$617(4) - 215(4) - 7(200) - 208 = 0 \Leftrightarrow P_3 \in \Pi.$$

Y naturalmente, se tiene, que si $P_1' := (x_1, y_1, z_1)$, $P_2' := (x_2, y_2, z_2)$ y $P_3' := (x_3, y_3, z_3)$ son tales que $\{P_1, P_2, P_3\} \subset \Pi \Rightarrow$ $P := (1-\alpha_1-\alpha_2)P_1 + \alpha_1 P_2 + \alpha_2 P_3$ cumple que $P \in \Pi$ $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, comprobamos esto rápidamente:

$$P = \big((1-\alpha_1-\alpha_2)x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3,\ (1-\alpha_1-\alpha_2)y_1 + \alpha_1 y_2 + \alpha_2 y_3,$$
$$(1-\alpha_1-\alpha_2)z_1 + \alpha_1 z_2 + \alpha_2 z_3\big)$$

Si sustituimos esto en nuestra ecuación implícita tenemos:

$$617\left((1-\alpha_1-\alpha_2)x_1+\alpha_1 x_2+\alpha_2 x_3\right)-215\left((1-\alpha_1-\alpha_2)y_1+\alpha_1 y_2+\alpha_2 y_3\right)$$

$$-7\left((1-\alpha_1-\alpha_2)z_1+\alpha_1 z_2+\alpha_2 z_3\right)-208=$$

$$=(1-\alpha_1-\alpha_2)\left[617x_1-215y_1-7z_1\right]+$$

$$+\alpha_1\left[617x_2-215y_2-7z_2\right]+$$

$$+\alpha_2\left[617x_3-215y_3-7z_3\right]-208$$

Como $P_1', P_2', P_3' \in \Pi \Rightarrow$

$617x_i-215y_i-7z_i-208=0 \quad \forall i \in \{1,2,3\}$

$\therefore$ tenemos que lo anterior es:

$$(1-\alpha_1-\alpha_2)208+208\alpha_1+208\alpha_2-208=$$

$$=\cancel{208}-\cancel{208\alpha_1}-\cancel{208\alpha_2}+\cancel{208\alpha_1}+\cancel{208\alpha_2}-\cancel{208}=0$$

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ $\therefore$ Siempre que se tengan $P_1, P_2, P_3 \in \Pi$ efectivamente $P=(1-\alpha_1-\alpha_2)P_1+\alpha_1 P_2+\alpha_2 P_3$ está en Π.