Geometría Analítica 2

Trabajo 5.

Mendoza Luna Luis Guillermo.

Ejercicios de la página 14:

3. Demuestra que los cuatro puntos $(1,2,3)$, $(2,4,1)$, $(-1,0,1)$, $(0,0,5)$ se encuentran en un plano. Encuentra la ecuación del plano.

Formemos el determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -1\left(2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}\right) = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -2(-4)+4(-2) = 8-8=0$$

Según el criterio de 4 puntos coplanares del texto, $(1,2,3)$, $(2,4,1)$, $(-1,0,1)$ y $(0,0,5)$ son coplanares.

La ecuación del plano es la siguiente:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} z$$

$$- \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} y - 4\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} z - (-5)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff 4(-4)x + (-1)\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} y + 4(-1)z + 5(-4) = 0$$

$$\iff -16x + 12y + 4z - 20 = 0 \iff 4x - 3y - z + 5 = 0$$

$\therefore$ $4x-3y-z+5=0$ es la ecuación del plano ~~que~~ pasa por los 4 puntos dados.

4. Determina la constante k tal que los puntos $(1,2,-1)$, $(3,-1,2)$, $(2,-2,3)$ y $(1,-1,k)$ sean coplanares.

Los puntos dados son coplanares si y sólo si

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & k & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & k & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -k \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \iff k = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \iff$$

$$k = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}} \iff k = \frac{8+3(-6)}{1-6} = \frac{-10}{-5} = 2.$$

$\therefore$ k debe ser igual a 2 para que los puntos sean coplanares.

Ejercicios de la página 18:

1. Reduce la ecuación del plano $3x-12y-4z-26=0$ a su forma normal.

Tenemos: $\vec{n}=(3,-12,-4)$ perpendicular al plano. Además $|\vec{n}|=\sqrt{3^2+12^2+4^2} = \sqrt{9+144+16} = \sqrt{169} = 13$.

Por lo tanto, la ecuación del plano en su forma normal es

$$\frac{3}{13}x - \frac{12}{13}y - \frac{4}{13}z - \frac{26}{13} = 0 \iff \frac{3}{13}x - \frac{12}{13}y - \frac{4}{13}z - 2 = 0 \iff$$

Mendoza Luna Luis Guillermo. TRABAJO 5.

3. ¿Cuál es la distancia del punto $(2,2,2)$ al plano $3x+4y-z-5=0$?

$$d=\frac{3(2)+4(2)-2-5}{\sqrt{3^2+4^2+1^2}}=\frac{6+8-2-5}{\sqrt{9+1+16}}=\frac{14-7}{\sqrt{26}}=\frac{7}{\sqrt{26}}$$

∴ La distancia buscada es $\frac{7}{\sqrt{26}}$

4. Encuentra la distancia entre los planos paralelos

$$2x-y+3z-4=0,\quad 2x-y+3z+5=0.$$

Reescribiendo las ecuaciones de ambos planos en su forma normal:

$$\frac{2x}{\sqrt{14}}-\frac{y}{\sqrt{14}}+\frac{3z}{\sqrt{14}}-\frac{4}{\sqrt{14}}=0,\qquad \frac{2x}{\sqrt{14}}-\frac{y}{\sqrt{14}}+\frac{3z}{\sqrt{14}}+\frac{5}{\sqrt{14}}=0$$

Las distancias de ambos planos al origen son $\frac{4}{\sqrt{14}}$ y $\frac{-5}{\sqrt{14}}$, respectivamente, así que podemos encontrar la distancia entre ambos planos tomando el valor absoluto de su diferencia:

$$\left|\frac{4}{\sqrt{14}}-\left(-\frac{5}{\sqrt{14}}\right)\right|=\frac{9}{\sqrt{14}}$$

Entonces, la distancia entre ambos planos es $9/\sqrt{14}$

10. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al origen es igual a su distancia al plano $3x+y-2z-11=0$.

Sea (x,y,z) uno de tales puntos. Entonces

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{3x+y-2z-11}{\sqrt{3^2+1+2^2}}$$

$$\iff \quad x^2+y^2+z^2=\frac{(3x+y-2z-11)^2}{14}$$

$$\iff \quad 14x^2+14y^2+14z^2=9x^2+y^2+4z^2+121+2(3x)(y)+2(3x)(-2z)+2(3x)(-11)+2y(-2z)+2y(-11)+2(-2z)(-11)$$

$$\iff \quad 5x^2+13y^2+10z^2-6xy+12xz+66x+4yz+22y-44z-121=0$$

es la ecuación buscada.

11. Escribe ~~la ecuación~~ del plano cuyas distancia del punto (0, 1, 1) es 3, y que es perpendicular al vector (2, −1, −1).

De acuerdo con la segunda condición, el plano tiene la forma $2x - y - z + D = 0$. La primera condición significa que

$$\frac{|2(0) - 1(1) - 1 + D|}{\sqrt{6}} = 3$$

$$\Rightarrow D = 1 + 2 + 3\sqrt{6} = 3 + \sqrt{6}$$

∴ $2x - y - z + 3 + \sqrt{6} = 0$ es la ecuación buscada del plano.

18. Determina el valor de m para el cual el plano $mx + 2y + 3z - 14 = 0$ se encuentra a 2 unidades del origen.

Pongamos la ecuación de este plano en su forma normal:

$$\frac{mx + 2y + 3z - 14}{\sqrt{m^2 + 13}} = 0$$

La distancia al origen está dada por $\frac{14}{\sqrt{m^2+13}}$, que según las condiciones del problema es 2. Entonces

$$\frac{14}{\sqrt{m^2+13}} = 2 \Rightarrow \sqrt{m^2+13} = 7 \Rightarrow m^2 + 13 = 49 \Rightarrow m^2 = 36$$

$$\Rightarrow m = \pm\sqrt{36} = \pm 6$$

∴ Los planos $6x + 2y - 3z - 14 = 0$ y $-6x + 2y - 3z - 14 = 0$ se encuentran ambos a dos unidades del origen.