Patricia A. Vélez Mellado 18/feb/05
Geometría Analítica II: TRABAJO 4

• Página 7

3. Muestre que los puntos $(4,3,-4)$, $(-2,9,-4)$ y $(-2,3,2)$ son vértices de un triángulo equilátero.

Sean $A(4,3,-4)$, $B(-2,9,-4)$ y $C(-2,3,2)$

• considérese el $\overrightarrow{AB} = (-6,6,0)$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-6)^2+(6)^2} = \sqrt{72}$

• considérese el $\overrightarrow{BC} = (0,-6,6)$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-6)^2+(6)^2} = \sqrt{72}$

• considérese $\overrightarrow{AC} = (-6,0,6)$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-6)^2+(6)^2} = \sqrt{72}$

Como $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{72}$, ABC es un triángulo equilátero

7. ¿Qué se puede decir acerca de la dirección de una línea si (a) $\cos\alpha = 0$, (b) $\cos\alpha = 0$ y $\cos\beta = 0$; (c) $\cos\alpha = 1$?

a) $\alpha = \measuredangle$ entre l y eje x
como $\cos\alpha = 0$, $\measuredangle\alpha = 90°$, por lo que l es perpendicular al eje x
$\Rightarrow$ l está en el plano formado por los ejes y, z

b) $\cos\alpha = 0$ y $\cos\beta = 0$

$\alpha = 90°$, $\beta = 90°$ $\Rightarrow$ l es perpendicular al eje x y al eje y

$\therefore$ l está sobre el eje z o es paralela a éste, i.e., $\gamma = 0$

(c) $\cos \alpha = 1$

$\alpha = 0$, por lo que l es paralela al eje x,

$\Rightarrow$ l es perpendicular al eje y, y al eje z

9) Encontrar los cosenos dirección de una recta que forma ángulos iguales con los ejes coordenados.

Como $\alpha = \beta = \gamma \Rightarrow \cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma$

Se sabe que:

$A = \cos \alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; $B = \cos \beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; $C = \cos \gamma = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

de donde,

$$A^2 + C^2 + B^2 = 1 \qquad (*)$$

pero $x = A = B = C \Rightarrow A^2 = B^2 = C^2 = x^2$ por lo que $(*)$ resulta

$$3x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

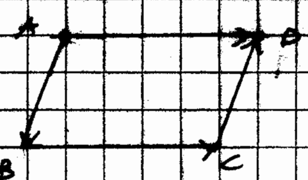
$$x = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|$$

$\Rightarrow \cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \left|\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right|$

Página 9

7. Muestre que los puntos $(3,7,2)$, $(4,3,1)$, $(1,6,3)$, $(2,2,2)$ son los vértices de un paralelogramo:

Sean $A(2,2,2)$, $B(4,3,1)$, $C(3,7,2)$ y $D(1,6,3)$:



• Considérense $\vec{AD} = (-1,4,1)$, y $\vec{BC} = (-1,4,1)$

$\Rightarrow \vec{AD} = \vec{BC}$, en particular $\vec{AD} \parallel \vec{BC}$ (i)

Luego, considérense $\vec{AB} = (2,1,-1)$ y $\vec{CD} = (-2,1,-1) \Rightarrow \vec{AB} = -\vec{CD}$, i.e. $\vec{AB} = \alpha\vec{CD}$, por lo que $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ (ii)

$\rightsquigarrow$ Por (i) y (ii) ABCD es un paralelogramo.

8. Encontrar las coordenadas de la intersección de las diagonales en el paralelogramo del ejercicio 7.

Se sabe que la intersección de las diagonales de un paralelogramo es el pto. medio de éstas:

$\Rightarrow$ Para la diagonal $\vec{AC} = \bar{C} - \bar{A}$, el punto medio $P_{M_1}(X_{M_1}, Y_{M_1}, Z_{M_1})$, está dado por:

$$P_{M_1} = \frac{\vec{A} + \vec{C}}{2} = \frac{(2,2,2)+(3,7,2)}{2} = \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 2\right)$$

• Para la diagonal $\vec{BD} = D - B$, el punto medio $P_{M_2}(X_{M_2}, Y_{M_2}, Z_{M_2})$, está dado por:

$$P_{M_2} = \frac{\bar{B} + \bar{D}}{2} = \frac{(4,3,1)+(1,6,3)}{2} = \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 2\right)$$

$\Rightarrow P_{M_1} = P_{M_2} = (5/2, 9/2, 2) = \bar{AC} \cap \bar{BD}$

9. Muestre por dos métodos diferentes que los tres puntos $(4,13,3)$, $(3,6,4)$, $(2,-1,5)$ son colineales

i) Tres ptos. son colineales si uno de ellos puede expresarse como:

$P = \frac{m_1 Q + m_2 R}{m_1 + m_2}$ para ciertos m_1 y m_2,

además $\frac{m_1}{m_1+m_2} + \frac{m_2}{m_1+m_2} = 1$

~~Para este~~ caso particular:
sean $P(4,13,3)$, $Q(3,6,4)$ y $R(2,-1,5)$

$\Rightarrow$ Si P, Q, R son colineales:

$$P = \alpha Q + \beta R \qquad (*)$$

$$1 = \alpha + \beta \qquad (**)$$

De $(**)$ $\beta = 1 - \alpha$, sust en $(*)$

$$P = \alpha Q + (1-\alpha) R$$
$$(4,13,3) = \alpha(3,6,4) + (1-\alpha)(2,-1,5)$$

$$4 = 3\alpha + (1-\alpha)2$$
$$13 = 6\alpha + (1-\alpha)(-1)$$
$$3 = 4\alpha + (1-\alpha)5$$

De donde $\alpha = 2$, $\beta = -1$

$\Rightarrow P = 2Q - R$

$\therefore P, Q, R$ son colineales

e) Sean $P(4,13,3)$, $Q(3,6,4)$ y $R(2,-1,5)$

Consideremos los vectores $\vec{PQ} = (-1,-7,1)$ y $\vec{PR} = (-2,-14,2)$, el área del paralelogramo formado por $\vec{PQ} = \vec{p}$ y $\vec{PR} = \vec{q}$ está dada por $A = |\vec{p} \times \vec{q}|$ i.e.

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -7 & 1 \\ -2 & -14 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(-14+14) - \hat{j}(-2+2) + \hat{k}(14-14)$$

$$\vec{p} \times \vec{q} = 0$$

$\Rightarrow |\vec{p} \times \vec{q}| = 0$, i.e., el área del paralelogramo es cero

$\therefore$ P, Q, R son colineales

11) Determinar las coordenadas de la intersección de las medianas del Δ con vértices en $(1,2,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$.

Las coordenadas baricéntricas del punto de intersección de las medianas son $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, para el ΔABC, $A(1,2,3)$, $B(2,3,1)$, $C(3,1,2)$; se tiene:

$$\vec{G} = \frac{1}{3}\vec{A} + \frac{1}{3}\vec{B} + \frac{1}{3}\vec{C} = \frac{1}{3}(1,2,3) + \frac{1}{3}(2,3,1) + \frac{1}{3}(3,1,2)$$

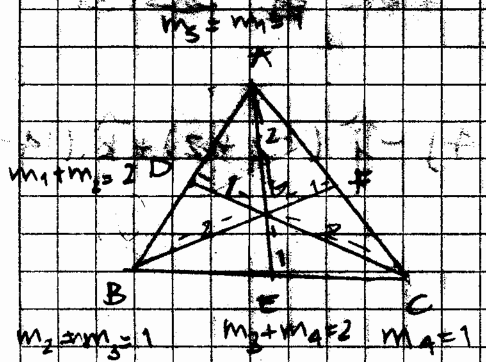
$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1, \frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)$$

$$\vec{G} = (2,2,2)$$

$\therefore$ el pto. de intersección de las medianas del ΔABC es $G(2,2,2)$

12.) Probar que las medianas de cualquier triángulo concurren en un punto que dista el doble del lo que dista del pto. medio del lado opuesto de cada vértice. Este punto es llamado gravicentro.

Sea ΔABC, con G = gravicentro:



i) El pto. D es el punto medio del segmento $\overline{AB}$

$\Rightarrow \bar{D} = \dfrac{\bar{A} + \bar{B}}{2}$

i.e., en los ptos. $\bar{A}$ y $\bar{B}$, hay una "masa" $m_1 = 1$ y $m_2 = 1$

ii) El pto. E es el pto. medio del segmento $\overline{BC}$

$\Rightarrow \bar{E} = \dfrac{B + C}{2}$, i.e., en los ptos. $\bar{B}$ y $\bar{C}$ hay una "masa" $m_3 = m_2 = 1$ y $m_4 = 1$

iii) El pto. F es el pto. medio del segmento $\overline{AC}$

$\Rightarrow F = \dfrac{A + C}{2}$, i.e., en los ptos. A y C hay una "masa" $m_5 = m_1 = 1$ y $m_6 = 1$.

- Si se considera en el punto D una "masa" $m_0 = m_1 + m_2 = 2$, resulta que

$G = \dfrac{2D + C}{3} \Rightarrow \dfrac{|DG|}{|GC|} = \dfrac{1}{2}$, G está a una proporción 1:2 con respecto a D y C

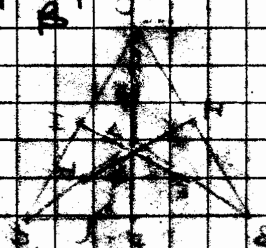
- Si se considera en el pto. E una "masa" $m_0 = m_3 + m_4 = 2$, resulta

$$G = \frac{2E + A}{3} \Rightarrow \frac{|EG|}{|GA|} = \frac{1}{2}$$

Por lo que G está a una proporción 1:2 con respecto a E y A

[illegible]

Por lo que G está a una proporción 1 a 2 con respecto a F y B



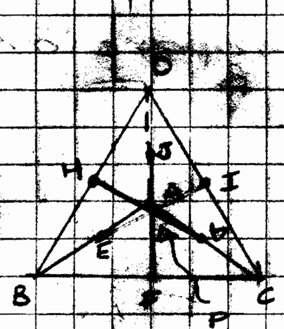
[illegible]

(*) [illegible]

[illegible]

(**) [illegible]

14. Mostrar que las 3 rectas que unen los puntos medios de las aristas opuestas de un tetraedro concurren en un punto que las biseca. Este punto es llamado centro de gravedad del tetraedro.



→ E es el punto medio de la arista $\overline{AB}$

$$\Rightarrow E = \frac{A+B}{2}$$

Luego, $\overline{CD}$ es la arista opuesta de $\overline{AB}$; I es el pto. medio de $\overline{CD}$

$$\Rightarrow I = \frac{C+D}{2}$$

Si se considera a P_1 como el punto medio de el segmento EI, se tiene que

$P_1 = \frac{E+I}{2}$, i.e., $P_1 = \frac{\left(\frac{A+B}{2}\right)+\left(\frac{C+D}{2}\right)}{2}$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}D \quad (*)$$

→ Por otra parte, F es el pto. medio de la arista BC

$$\Rightarrow F = \frac{B+C}{2}$$

AD es la arista opuesta a BC, J es su pto. medio

$$\Rightarrow J = \frac{A+D}{2}$$

Si se considera a P_2 como el punto medio del segmento FJ, resulta:

$P_2 = \frac{F+J}{2}$, i.e., $P_2 = \frac{\left(\frac{B+C}{2}\right)+\left(\frac{A+D}{2}\right)}{2}$

$$P_2 = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}D \quad (**)$$

Luego, G es el pto. medio de la arista AC,

$$\Rightarrow G = \frac{A+C}{2}$$

BD, es la arista opuesta a AC y su pto medio es H

$$\Rightarrow H = \frac{B+D}{2}$$

Si se considera a P_3 como el pto. medio del segmento GH, resulta:

$$P_3 = \frac{G+H}{2} \text{, sust.} \Rightarrow P_3 = \frac{\left(\frac{A+C}{2}\right) + \left(\frac{B+D}{2}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow P_3 = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}D \quad (***)$$

De (*), (**) y (***)

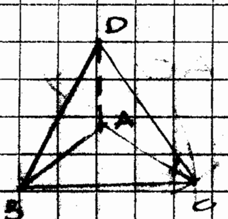
$$P_1 = P_2 = P_3 = P$$

$$\Rightarrow P = EI \cap FJ \cap GH$$

donde, E = pto. medio de AB; I pto. medio de CD; F pto medio de BC; J pto medio de AD; G pto medio de AC y H pto. medio de BD

$$\therefore P = \frac{1}{4}\bar{A} + \frac{1}{4}\bar{B} + \frac{1}{4}\bar{C} + \frac{1}{4}\bar{D} = \text{gravicentro}$$

14. Mostrar que las rectas que unen cada vértice de un tetraedro con el gravicentro de la cara opuesta pasa por el centro de gravedad del tetraedro.



i) Considérese a G_1 como el gravicentro del $\triangle ABC$

$$\Rightarrow G_1 = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$$

D es el vértice opuesto a ABC. Se buscan α y β tales

$$\alpha G_1 + \beta D = G^* \quad \ldots \quad (a)$$

$$\alpha + \beta = 1$$

con G^* = gravicentro de ABCD. (a) puede expresarse como:

$$\alpha G_1 + (1-\alpha) D = G^* \quad \ldots \quad (a)$$

Pero, de ej. 13 se sabe que $G^* = \frac{1}{4}\bar{A} + \frac{1}{4}\bar{B} + \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}D$

Expresando a (a) en términos de A, B, C, D se obtiene:

$$(a) \ldots \quad \alpha\left(\frac{1}{3}\bar{A} + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C\right) + (1-\alpha)D = \frac{1}{4}\bar{A} + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}D$$

igualando los términos con respecto a A, resulta:

$$\alpha = \frac{3}{4}$$

$\Rightarrow$ De (a) $\quad \frac{3}{4}G_1 + \frac{1}{4}D = G^*$

de donde, G^* es colineal con G_1 y D; como $\alpha \in [0,1]$ $\quad G^* \in \overrightarrow{DG_1}$

ii) Considerese a G_2 como el gravicentro del $\triangle$ ACD

$$\Rightarrow G_2 = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}D$$

B es el vértice opuesto al $\triangle$ ACD, luego, se busca α tal que,

$$\alpha G_2 + (1-\alpha)B = G^* \quad \ldots \text{(b)}$$

Expresando a (b) en términos de ABCD, resulta

$$\alpha\left(\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}D\right) + (1-\alpha)B = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}D$$

igualando término a término, resulta

$$\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \text{De (b)} \quad \frac{3}{4}G_2 + \frac{1}{4}B = G^*$$

de donde es posible concluir que G^* está alineado con G_2 y B, además como $\alpha \in [0,1]$ $G^* \in \overline{BG_2}$

iii) Considerese a G_3 como el gravicentro del $\triangle$ ADB

$$\Rightarrow G_3 = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}D + \frac{1}{3}B$$

C es el vértice opuesto a la cara ADB, por lo que se busca α tal que,

$$\alpha G_3 + (1-\alpha)C = G^* \quad \ldots \text{(c)}$$

Expresando (c) en términos de ABCD, resulta

$$\alpha\left(\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}D + \frac{1}{3}B\right) + (1-\alpha)C = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}D$$

Igualando término a término

$$\alpha = 3/4$$

$\therefore$ L^* está alineado con