Domínguez Aguilar Saul   4068 G.A. II

Tarea

Pagina 7

3) Muestra que los estos puntos $(4,3,-4)$, $(-2,9,-4)$ y $(-2,3,2)$ son vertices de un triangulo equilatero

$A(4,3,-4)$; $B(-2,9,-4)$ y $C(-2,3,2)$

$d(A,B)=\sqrt{(4+2)^2+(3-9)^2+(-4+4)^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{72}$

$d(B,C)=\sqrt{(-2+2)^2+(9-3)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{72}$

$d(C,A)=\sqrt{(-2-4)^2+(3-3)^2+(2+4)^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{72}$

Como las tres distancias anteriores son magnitudes de los lados del $\triangle ABC$ y como son iguales entre si:

$\therefore$ Los puntos A, B y C determinan un triangulo equilatero

7) Cual es la dirección de una linea si

(a) $\cos\alpha=0$

$\alpha=\cos^{-1}0=90°$ $\therefore$ la linea es perpendicular al eje "x"

(b) $\cos\alpha=0$ y $\cos\beta=0$

$\alpha=90°$ y $\beta=90°$ $\therefore$ la linea esta sobre el eje "z"

(c) $\cos\alpha=1$

$\alpha=\cos^{-1}1=0$ $\therefore$ la linea esta sobre el eje "x"

(9) Encuentra los cosenos directores de una línea cuando se construyen sus ángulos iguales.

Se sabe que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ para $\mathbb{R}^3$

Al construirse los tres iguales, $3\cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$ donde $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\alpha = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{54°44'8''}} = \beta = \gamma$

Para $\mathbb{R}^2$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$ al ser iguales $2\cos^2\alpha = 1$; $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}$

$\cos\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ donde $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\alpha = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{45°}} = \beta$

Pagina 9 y 10

7) Muestra que estos puntos P(3,7,2), Q(4,3,1), R(1,6,3) y S(2,2,2) son los vertices de un paralelogramo

Se forma un sistema de ecuaciones con P, Q y R y se supone a A=1 y con ayuda de la calculadora se resuelve para B, C y D.

$$\begin{aligned} 3 + B\cdot 7 + C\cdot 2 + D &= 0 \\ 4 + B\cdot 3 + C\cdot 1 + D &= 0 \\ 1 + B\cdot 6 + C\cdot 3 + D &= 0 \end{aligned} \quad \text{donde } \Theta = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{1}{-5} \qquad C = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-9}{-5}$$

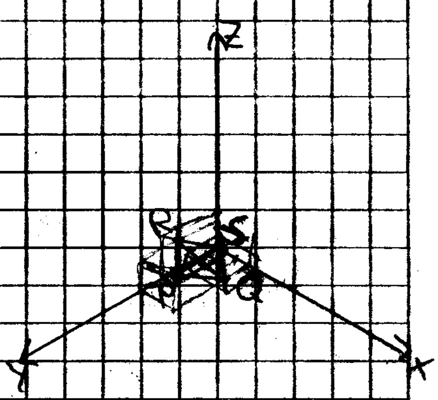
$$D = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{26}{5}$$

$\therefore\ 1x - \frac{1}{5}y + \frac{9}{5}z - \frac{26}{5} = 0 \Rightarrow 5x - y + 9z - 26 = 0$ es la ecuación de plano generado por P, Q, R

Donde S(2,2,2) cumple la ecuación de este plano ya que:

$$5\cdot 2 - 2 + 9\cdot 2 - 26 = 10 - 2 + 18 - 26 = 28 - 28 = 0$$

$\therefore$ P, Q, R y S estan en el mismo plano.



$d(P,Q) = \sqrt{(3-4)^2 + (7-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18}$

$d(R,S) = \sqrt{(1-2)^2 + (6-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18}$

$d(P,R) = \sqrt{(3-1)^2 + (7-6)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

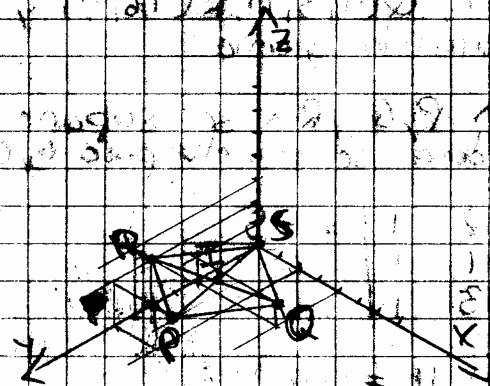
$d(Q,S) = \sqrt{(4-2)^2 + (3-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$d(P,S) = \sqrt{(3-2)^2 + (7-2)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{1+25+0} = \sqrt{26}$

$d(Q,R) = \sqrt{(4-1)^2 + (3-6)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{9+9+4} = \sqrt{22}$

$\therefore$ como $d(P,Q) = d(R,S)$, $d(P,R) = d(Q,S)$ y $d(P,S) \neq d(Q,R)$ P, Q, R y S son vertices de un paralelogramo

⑧ Encuentra las coordenadas de la intersección de las diagonales en el paralelogramo del ejercicio ⑦.



$P(3,7,2)$
$Q(4,3,1)$
$R(1,6,3)$
$S(2,2,2)$

$$I\left(\frac{4+1}{2}, \frac{6+3}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 2\right)$$

⑨ Muestra dos distintos métodos para que los tres puntos $A(4,13,3)$, $B(3,6,4)$ y $C(2,-7,5)$ sean colineales.

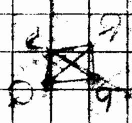
$$\begin{vmatrix} 4 & 13 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 120+104-9-36-195+16 = 0 \quad \therefore\ A, B \text{ y } C \text{ son colineales}$$

$$d(A,B) = \sqrt{(4-3)^2+(13-6)^2+(3-4)^2} = \sqrt{1+49+1} = \sqrt{51}$$

$$d(B,C) = \sqrt{(3-2)^2+(6+1)^2+(4-5)^2} = \sqrt{1+49+1} = \sqrt{51}$$

$$d(A,C) = \sqrt{(2-4)^2+(-1-13)^2+(5-3)^2} = \sqrt{4+196+4} = \sqrt{204} = \sqrt{4\cdot 51} = 2\sqrt{51}$$

Como $d(A,C) = d(A,B) + d(B,C) = 2\sqrt{51}$ A, B y C son colineales



(10) Una línea construye un ángulo de 75° con el eje X y 30° con el eje Y. ¿Cuál es la posición en la que está? Encuentra, por cada posición, el coseno con el ángulo formado con el eje Z.

$$\cos^2 75° + \cos^2 30° + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\cos\gamma = \sqrt{1-\cos^2 75° - \cos^2 30°} = \sqrt{.1830}$$

$$\gamma = \cos^{-1}\sqrt{.1830} = \underline{64°40'19''} \; //$$ Que es el ángulo de la línea con el eje Z

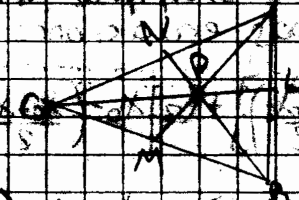
(11) Determina las coordenadas de la intersección de las medianas de el triángulo cuyos vértices son A(1,2,3), B(2,3,1) y C(3,1,2).

Punto medio AB : $M\left(\frac{1+2}{2}, \frac{2+3}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 2\right)$

" " BC : $M\left(\frac{2+3}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{1+2}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$

" " CA : $M\left(\frac{3+1}{2}, \frac{1+2}{2}, \frac{2+3}{2}\right) = \left(2, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

Se sabe que el punto P divide se ubica a $\frac{2}{3}$ de las medianas desde el vértice. Sup. que ΔABC está en el espacio



desde A.

$$P = (1,2,3) - \frac{2}{3}\left(1-\frac{5}{2}, 2-2, 3-\frac{3}{2}\right)$$

$$= (1,2,3) - \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$$

$$P(x,y,z) = (1+1, 2-0, 3-1) = \boxed{(2,2,2)} \; //$$

Desde B

$$P = (2,3,1) - \frac{2}{3}\left(2-2, 3-\frac{3}{2}, 1-\frac{5}{2}\right) = (2,3,1) - \frac{2}{3}\left(0, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

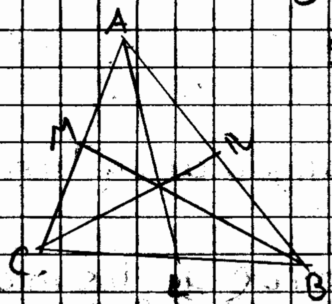
$$= (2-0, 3-1, 1+1) = \underline{(2,2,2)} \; //$$

Desde C

$$P = (3,1,2) - \frac{2}{3}\left(3-\frac{3}{2}, 1-\frac{5}{2}, 2-2\right) = (3,1,2) - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)$$

$$= (3-1, 1+1, 2-0) = \underline{(2,2,2)} \; //$$

(12) Prueba que las medianas de un triángulo concurren en un punto de trisección formados desde cada vértice hasta la mitad del lado opuesto y a este punto se le conoce como el centro de gravedad o del triángulo.



Sea ΔABC en el espacio y L, M y N los puntos medios de BC, CA y AB respectivamente

$A(x_a, y_a, z_a)$, $B(x_b, y_b, z_b)$ y $C(x_c, y_c, z_c)$

$$L\left(\frac{x_b+x_c}{2}, \frac{y_b+y_c}{2}, \frac{z_b+z_c}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{x_c+x_a}{2}, \frac{y_c+y_a}{2}, \frac{z_c+z_a}{2}\right)$$

$$N\left(\frac{x_a+x_b}{2}, \frac{y_a+y_b}{2}, \frac{z_a+z_b}{2}\right)$$

Intersección de AL y BM

$$AL: P=(x_a, y_a, z_a)-t_1\left(x_a-\left(\frac{x_b+x_c}{2}\right), y_a-\left(\frac{y_b+y_c}{2}\right), z_a-\left(\frac{z_b+z_c}{2}\right)\right)$$

$$BM: P=(x_b, y_b, z_b)-t_2\left(x_b-\left(\frac{x_c+x_a}{2}\right), y_b-\left(\frac{y_c+y_a}{2}\right), z_b-\left(\frac{z_c+z_a}{2}\right)\right)$$

Se busca los valores t_1 y t_2 que cumplan ambas ecuaciones, al igualar ambas ecuaciones y simplificarlas queda:

$$\left(x_a-x_b-t_1\left[x_a-\left(\frac{x_b+x_c}{2}\right)\right]+t_2\left[x_b-\left(\frac{x_c+x_a}{2}\right)\right], y_a-y_b-t_1\left[y_a-\left(\frac{y_b+y_c}{2}\right)\right]+t_2\left[y_b-\left(\frac{y_c+y_a}{2}\right)\right],\right.$$

$$\left.z_a-z_b-t_1\left[z_a-\left(\frac{z_b+z_c}{2}\right)\right]+t_2\left[x_b-\left(\frac{x_c+x_a}{2}\right)\right]\right)=\vec{0}=(0,0,0)$$

En donde

$$x_a-x_b-t_1\left[x_a-\left(\frac{x_b+x_c}{2}\right)\right]+t_2\left[x_b-\left(\frac{x_c+x_a}{2}\right)\right]=0$$

$$x_a-x_b-t_1x_a+\frac{t_1x_b}{2}+\frac{t_1x_c}{2}+t_2x_b-\frac{t_2x_c}{2}-\frac{t_2x_a}{2}=0$$

$$x_a\left(1-t_1-\frac{t_2}{2}\right)-x_b\left(1-\frac{t_1}{2}-t_2\right)+x_c\left(\frac{t_1}{2}-\frac{t_2}{2}\right)=0$$

como x_a, x_b y x_c no necesariamente son cero

$$1-t_1-\frac{t_2}{2}=0,\quad 1-\frac{t_1}{2}-t_2=0 \quad y \quad \frac{t_1}{2}-\frac{t_2}{2}=0 \Rightarrow t_1=t_2$$

$$\therefore\ 1-t_1\left(1+\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow t_1=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3} \quad \therefore\ t_1=t_2=\frac{2}{3} \quad //$$

Ahora ya encontre que para $t_1 = t_2 = \frac{2}{3}$, P es la intersección de AL y BM.

Para la intersección BM y CN se usa el mismo argumento, intercambiando lo correspondiente, en donde $t_3 = t_2 = \frac{2}{3}$

Comprobación para la concurrencia de AL, BM y CN que son las medianas,

Sea $t_1 = t_2 = t_3 = \frac{2}{3}$

Con AL

$$P = (x_a, y_a, z_a) - \frac{2}{3}\left(x_a - \left(\frac{x_b + x_c}{2}\right), y_a - \left(\frac{x_b + x_c}{2}\right), z_a - \left(\frac{z_b + z_c}{2}\right)\right)$$

$$= \left(x_a - \frac{2}{3}x_a + \frac{x_b + x_c}{3}, y_a - \frac{2}{3}y_a + \frac{y_b + y_c}{3}, z_a - \frac{2}{3}z_a + \frac{z_b + z_c}{3}\right)$$

$$= \underline{\left(\frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{y_a + y_b + y_c}{3}, \frac{z_a + z_b + z_c}{3}\right)} //$$

Con BM

$$P = (x_b, y_b, z_b) - \frac{2}{3}\left(x_b - \left(\frac{x_a + x_c}{2}\right), y_b - \left(\frac{y_a + y_c}{2}\right), z_b - \left(\frac{z_a + z_c}{2}\right)\right)$$

$$= \left(x_b - \frac{2}{3}x_b + \frac{x_a + x_c}{3}, y_b - \frac{2}{3}y_b + \frac{y_a + y_c}{2}, z_b - \frac{2}{3}z_b + \frac{z_a + z_c}{2}\right)$$

$$= \underline{\left(\frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{y_a + y_b + y_c}{3}, \frac{z_a + z_b + z_c}{2}\right)} //$$

Con CN

$$P = (x_c, y_c, z_c) - \frac{2}{3}\left(x_c - \left(\frac{x_a + x_b}{2}\right), y_c - \left(\frac{y_a + y_b}{2}\right), z_c - \left(\frac{z_a + z_b}{2}\right)\right)$$

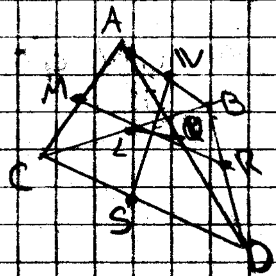
$$= \left(x_c - \frac{2}{3}x_c + \frac{x_a + x_b}{3}, y_c - \frac{2}{3}y_c + \frac{y_a + y_b}{3}, z_c - \frac{2}{3}z_c + \frac{z_a + z_b}{3}\right)$$

$$= \underline{\left(\frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{y_a + y_b + y_c}{3}, \frac{z_a + z_b + z_c}{3}\right)} //$$

Como en los tres casos se llega al mismo punto AL, BM y CN son concurrentes y por lo tanto las medianas de triangulo cualquiera lo son en un punto P.

13) Prueba que las tres líneas rectas que se forman por los puntos medios de aristas opuestas en un tetraedro concurren en un punto, y este las bisecta.

Sea un tetraedro en el espacio con vértices A, B, C y D



$A(x_a, y_a, z_a)$, $B(x_b, y_b, z_b)$, $C(x_c, y_c, z_c)$, $D(x_d, y_d, z_d)$

Puntos medios de BC, CA, AB, AD, DB y CD en es orden

$L\left(\frac{x_b+x_c}{2}, \frac{y_b+y_c}{2}, \frac{z_b+z_c}{2}\right)$, $M\left(\frac{x_c+x_a}{2}, \frac{y_c+y_a}{2}, \frac{z_c+z_a}{2}\right)$,

$N\left(\frac{x_a+x_b}{2}, \frac{y_a+y_b}{2}, \frac{z_a+z_b}{2}\right)$, $Q\left(\frac{x_a+x_d}{2}, \frac{y_a+y_d}{2}, \frac{z_a+z_d}{2}\right)$,

$R\left(\frac{x_d+x_b}{2}, \frac{y_d+y_b}{2}, \frac{z_d+z_b}{2}\right)$, $S\left(\frac{x_c+x_d}{2}, \frac{y_c+y_d}{2}, \frac{z_c+z_d}{2}\right)$.

P tendría que ser igual para los tres casos siguientes.

Con LQ

$$P = \left(\frac{x_b+x_c}{2}, \frac{y_b+y_c}{2}, \frac{z_b+z_c}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x_b+x_c-x_a-x_d}{2}, \frac{y_b+y_c-y_a-y_d}{2}, \frac{z_b+z_c-z_a-z_d}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2x_b+2x_c-x_b-x_c+x_a+x_d}{4}, \frac{2y_b+2y_c-y_b-y_c+y_a+y_d}{4}, \frac{2z_b+2z_c-z_b-z_c+z_a+z_d}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{x_a+x_b+x_c+x_d}{4}, \frac{y_a+y_b+y_c+y_d}{4}, \frac{z_a+z_b+z_c+z_d}{4}\right)$$

Con MR

$$P = \left(\frac{x_c+x_a}{2}, \frac{y_c+y_a}{2}, \frac{z_c+z_a}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x_c+x_a-x_d-x_b}{2}, \frac{y_c+y_a-y_d-y_b}{2}, \frac{z_c+z_a-z_d-z_b}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2x_c+2x_a-x_c-x_a+x_d+x_b}{4}, \frac{2y_c+2y_a-y_c-y_a+y_d+y_b}{4}, \frac{2z_c+2z_a-z_c-z_a+z_b+z_d}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{x_a+x_b+x_c+x_d}{4}, \frac{y_a+y_b+y_c+y_d}{4}, \frac{z_a+z_b+z_c+z_d}{4}\right)$$

Con NS

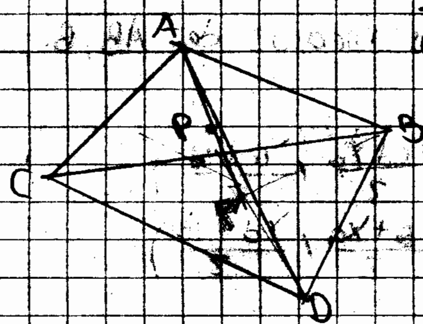
$$P = \left(\frac{x_a+x_b}{2}, \frac{y_a+y_b}{2}, \frac{z_a+z_b}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x_a+x_b-x_c-x_d}{2}, \frac{y_a+y_b-y_c-y_d}{2}, \frac{z_a+z_b-z_c-z_d}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2x_a+2x_b-x_a-x_b+x_c+x_d}{4}, \frac{2y_a+2y_b-y_a-y_b+y_c+y_d}{4}, \frac{2z_a+2z_b-z_a-z_b+z_c+z_d}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{x_a+x_b+x_c+x_d}{4}, \frac{y_a+y_b+y_c+y_d}{4}, \frac{z_a+z_b+z_d+z_c}{4}\right)$$

Como para los tres casos anteriores P es el mismo LQ, MR y NS son concurrentes donde L y Q, M y R, N y S son puntos medios de aristas opuestas de un tetraedro ABCD

(4) Muestra que las lineas rectas de cada vertice de un tetrahedro que van al punto de intersección de las mendianas de la cara opuesta pasan por el centro de gravedad.



Sea ABCD un tetrahedro en el espacio donde

$P\left(\frac{x_b+x_c+x_d}{3},\frac{y_b+y_c+y_d}{3},\frac{z_b+z_c+z_d}{3}\right)$ el centro de gravedad del $\triangle BCD$ (donde cambiando vertices y subindices correspondientes representan los todos los P.G. de cada cara de tetrahedro).

$P=(x_a,y_a,z_a)-t\left(\frac{3x_a-x_b-x_c-x_d}{3},\frac{3y_a-y_b-y_c-y_d}{3},\frac{3z_a-z_b-z_c-z_d}{3}\right)$

donde una t especifica determina el punto P (C.G del Tetrahedro)

Para más facil en la obtención de la t buscada sólo utilizo las coordenadas en x.

$\frac{x_a+x_b+x_c+x_d}{4}=x_a-t\left(\frac{3x_a-x_b-x_c-x_d}{3}\right)$

$\frac{-3x_a+x_b+x_c+x_d}{4}=t\left(\frac{-3x_a+x_b+x_c+x_d}{3}\right)\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{t}{3}\Rightarrow t=\frac{3}{4}$

$\therefore$ debe de cumplirse que

$P=(x_a,y_a,z_a)-\frac{3}{4}\left(\frac{3x_a-x_b-x_c-x_d}{3},\frac{3y_a-y_b-y_c-y_d}{3},\frac{3z_a-z_b-z_c-z_d}{3}\right)$

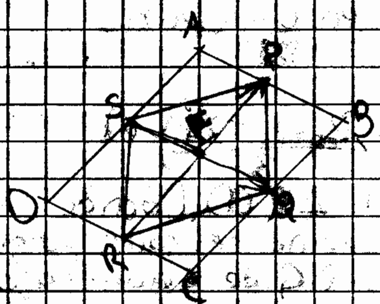
$=\left(\frac{4x_a-3x_a+x_b+x_c+x_d}{4},\frac{4y_a-3y_a+y_b+y_c+y_d}{4},\frac{4z_a-3z_a+z_b+z_c+z_d}{4}\right)$

$=\left(\frac{x_a+x_b+x_c+x_d}{4},\frac{y_a+y_b+y_c+y_d}{4},\frac{z_a+z_b+z_c+z_d}{4}\right)$ que es el C.G. del Tetrahedro.

$\therefore$ La linea recta que va del vertice al C.G. de la cara opuesta pasa por el C.G. del Tetrahedro, que determinan.

15) Muestra que las líneas rectas de los puntos medios de los lados de un cuadrilátero forman un paralelogramo

Sea ABCD un cuadrilátero en $\mathbb{R}^2$



P, Q, R, S los puntos medios de AB, BC, CD y DA respectivamente.

$P\left(\frac{x_a+x_b}{2}, \frac{y_a+y_b}{2}\right)$ $R\left(\frac{x_c+x_d}{2}, \frac{y_c+y_d}{2}\right)$

$Q\left(\frac{x_b+x_c}{2}, \frac{y_b+y_c}{2}\right)$ $S\left(\frac{x_d+x_a}{2}, \frac{y_d+y_a}{2}\right)$

donde E debería de ser el mismo punto para

$E = \bar{P} - \frac{1}{2}(\bar{P}-\bar{R})$ y $E = \bar{Q} - \frac{1}{2}(\bar{Q}-\bar{S})$

Caso 1

$$E = \left(\frac{x_a+x_b}{2}, \frac{y_a+y_b}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x_a+x_b-x_c-x_d}{2}, \frac{y_a+y_b-y_c-y_d}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2x_a+2x_b-x_a-x_b+x_c+x_d}{4}, \frac{2y_a+2y_b-y_a-y_b+y_c+y_d}{4}\right)$$

$$= \underline{\underline{\left(\frac{x_a+x_b+x_c+x_d}{4}, \frac{y_a+y_b+y_c+y_d}{4}\right)}} //$$

Caso 2

$$E = \left(\frac{x_b+x_c}{2}, \frac{y_b+y_c}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x_b+x_c-x_d-x_a}{2}, \frac{y_b+y_c-y_d-y_a}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2x_b+2x_c-x_b-x_c+x_d+x_a}{4}, \frac{2y_b+2y_c-y_b-y_c+y_d+y_a}{4}\right)$$

$$= \underline{\underline{\left(\frac{x_a+x_b+x_c+x_d}{4}, \frac{y_a+y_b+y_c+y_d}{4}\right)}} //$$

∴ como el punto medio de cada diagonal es el mismo PQRS forman un paralelogramo.