Geometría Analítica II

Trabajo 3

Mendoza Luna Luis Guillermo.

Sean $S: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $(x_p, y_p) \in \mathbb{R}^2$ y $S_p: x x_p + 4 y y_p - 4 = 0$. Lleve a cabo un análisis similar al realizado en clase con respecto a la elipse indicada sobre las propiedades de S_p cuando (x_p, y_p) es interior y exterior a la elipse.

- Primero demostraremos que si $(x_p, y_p) \in S$, S_p representa la tangente a S en P.

$\ast$ Supongamos primero que $y_p = 0$, de modo que $x_p = 2$ ó $x_p = -2$. Entonces, claramente $2x + 4 \cdot 0y = 4 \iff x = 2$ y $-2x + 4 \cdot 0y = 4 \iff x = -2$ representan las tangentes a S trazadas por (x_p, y_p).

$\ast$ Supongamos $y_p \neq 0$. Esto equivale a suponer $x_p \neq \pm 2$. La ecuación de la tangente tiene la forma $y = mx + b$, de modo que $y_p = m x_p + b$. Sustituyendo esta expresión de y_p en la ecuación de S obtenemos.

$$\frac{x_p^2}{4} + (m x_p + b)^2 = 1$$

$$\Rightarrow x_p^2 (m^2 + 1/4) + x_p (2mb) + (b^2 - 1) = 0.$$

y como el valor de x_p debe ser real y único (por la condición de tangencia), el discriminante de esta ecuación cuadrática en x_p debe ser 0:

$$4m^2 b^2 - 4(m^2 + 1/4)(b^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow b^2 = 4m^2 + 1.$$

Sustituyendo el valor $b = y_p - m x_p$ en la expresión anterior se obtiene

$$4m^2 + 1 = (y_p - m x_p)^2$$

$$\Rightarrow m^2 (4 - x_p^2) + m (2 x_p y_p) + (1 - y_p^2) = 0$$

El valor del discriminante de esta ecuación cuadrática en m es:

$$4 x_p^2 y_p^2 - 4(4 - x_p^2)(1 - y_p^2) = 4[x_p^2 y_p^2 - (4 - 4y_p^2 - x_p^2 + x_p^2 y_p^2)] = 4[-4 + 4y_p^2 + x_p^2]$$

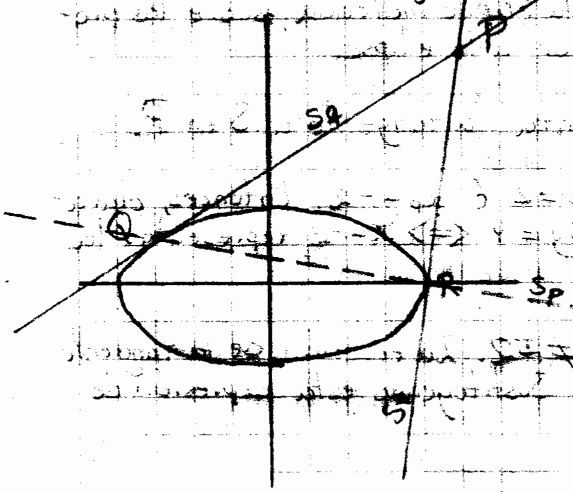
$= 0$, puesto que $(x_p, y_p) \in S$.

$$\therefore m = \frac{-2 x_p y_p}{2(4 - x_p^2)} = \frac{-x_p y_p}{4 y_p^2} = \frac{-x_p}{4 y_p} \quad \therefore b = y_p + \frac{x_p^2}{4 y_p} = \frac{4 y_p^2 + x_p^2}{4 y_p} = \frac{4}{4 y_p} = \frac{1}{y_p}$$

$\therefore$ $y = \frac{-x_p}{4 y_p} x + \frac{1}{y_p} \iff x x_p + 4 y y_p - 4 = 0$ representa la tangente a S en P.

Mendoza Luna Luis Guillermo

• Supongamos que (x_p, y_p) es exterior a S. Tracemos rectas tangentes a S desde P, y llamemos Q y R a los puntos de tangencia. Las ecuaciones de estas rectas son:



$$S_q: x x_q + 4 y y_q - 4 = 0$$

$$S_R: x x_r + 4 y y_r - 4 = 0$$

Como $P \in S_q \cap S_R$, satisface las ecuaciones de ambas rectas:

$$x_p x_q + 4 y_p y_q - 4 = 0$$

$$x_p x_r + 4 y_p y_r - 4 = 0$$

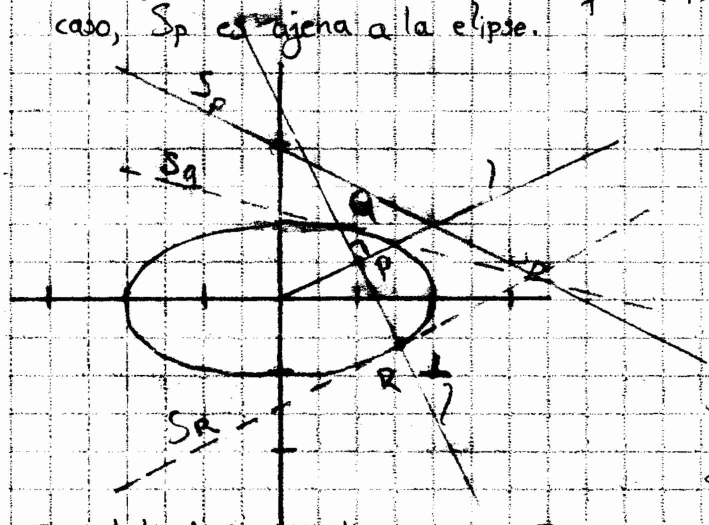
Ahora bien, volviendo a la definición de $S_p: x x_p + 4 y y_p - 4 = 0$ observamos que la validez de las dos ecuaciones anteriores implica que $Q, R \in S_p$.

$\therefore S_p = \overleftrightarrow{QR}$

En conclusión, si P es un punto exterior a S y Q y R son las tangentes a S trazadas desde P, entonces S_p es la recta que pasa por Q y R.

Mendoza Luna Luis Guillermo.

- Consideremos ahora el caso en que (x_p, y_p) es interior a la elipse. En este caso, S_p es ajena a la elipse.



Sea l la recta que pasa por P y el centro de S, y sea $^{\perp}l$ la recta que pasa por P y es perpendicular a l. Entonces $^{\perp}l$ corta a S dos veces, digamos en Q y en R.

Las ecuaciones de las tangentes a S por Q y R son:

S_q: $x x_q + 4 y y_q - 4 = 0$

S_R: $x x_r + 4 y y_r - 4 = 0$.

En adelante supondremos que P es distinto del origen, lo cual geométricamente implica que S_q y S_R no son paralelas y, por tanto, se cortan. Mostraremos que S_p es la recta que pasa por dicha intersección mostrando que S_p, S_q y S_r son concurrentes.

Antes que nada, P, Q y R son colineales por construcción (los tres puntos se encuentran en $^{\perp}l$); por el criterio de colinealidad de 3 puntos:

$$\begin{vmatrix} x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \\ x_r & y_r & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ahora, si formamos el determinante con los coeficientes de S_p, S_q y S_r obtenemos:

$$\begin{vmatrix} x_p & 4y_p & -4 \\ x_q & 4y_q & -4 \\ x_r & 4y_r & -4 \end{vmatrix} = -16 \begin{vmatrix} x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \\ x_r & y_r & 1 \end{vmatrix} = 0.$$ por la linealidad del determinante,

y por el criterio de concurrencia de rectas, S_p, S_q y S_r son concurrentes.

En conclusión, si P es interior a la elipse S y distinto del origen, l la recta que pasa por el origen y P, $^{\perp}l$ la perpendicular a l por P y Q y R las intersecciones de $^{\perp}l$ con S, entonces S_p es la recta que pasa por la intersección de S_q y S_r.