Facultad de Ciencias, U.N.A.M.

Matemáticas

Geometría Analítica II

Trabajo 3

Juan Salvador Garza Ledesma

14/feb/2005

Considere la elipse cuya ecuación es:

$\mathcal{E}: \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$, y defina la recta S_p como

$x x_p + 4 y y_p = 4$ donde $P = (x_p, y_p)$, describir a S_p.

Primero vamos a tratar de ubicar a S_p con respecto a $\mathcal{E}$, nos interesan principalmente tres casos; $P \in \mathcal{E}$, P está dentro de $\mathcal{E}$, es decir $\dfrac{x_p^2}{4} + \dfrac{y_p^2}{1} < 1$ o P está fuera de $\mathcal{E}$, $\dfrac{x_p^2}{4} + \dfrac{y_p^2}{1} > 1$, para ver qué sucede en cada caso consideremos la intersección $S_p \cap \mathcal{E}$, es decir, resolveremos el siguiente sistema para x, y:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1 \quad \ldots \mathcal{E} \ldots \quad x^2 + 4y^2 = 4 \\ x x_p + 4 y y_p = 4 \quad \ldots S_p \end{cases}$$

Si despejamos x en S_p se obtiene $x = \dfrac{4}{x_p}(1 - y_p y)$ que al ser sustituida en $\mathcal{E}$ da una ecuación de segundo grado en y:

$$(x_p^2 + 4y_p^2)y^2 + (-8y_p)y + 4 - x_p^2 = 0$$

que como sabemos puede tener 2 soluciones reales, una solución real o soluciones complejas, lo cual nos dirá si S_p corta en dos puntos a $\mathcal{E}$, es tangente a $\mathcal{E}$ o no corta a $\mathcal{E}$ respectivamente, para ello analizemos la expresión (discriminante) siguiente:

$$D = 64y_p^2 - 4(x_p^2 + 4y_p^2)(4 - x_p^2) \quad \text{que es}$$

$$D = 4x_p^2(x_p^2 + 4y_p^2 - 4)$$

ahora observemos que si $P \in \mathcal{E} \Rightarrow x_p^2 + 4y_p^2 = 4 \Rightarrow D = 0 \therefore S_p$ es tangente a $\mathcal{E}$ en P; si $P \notin \mathcal{E}$, y P está dentro de $\mathcal{E} \Rightarrow x_p^2 + 4y_p^2 < 4 \Rightarrow D < 0 \Rightarrow S_p$ no interseca a $\mathcal{E}$ y finalmente si P está fuera de $\mathcal{E}$ $\Rightarrow x_p^2 + 4y_p^2 > 4 \Rightarrow D > 0 \Rightarrow S_p$ interseca en dos puntos a $\mathcal{E}$. Vemos que S_p se comporta de manera similar a la S_p que se revisó en el trabajo anterior en cuanto a la ubicación de P.

Ahora vamos a conseguir métodos que permitan visualizar S_P rápidamente dado P, ya sabemos que si P es un punto de $\mathcal{E}$ basta tomar la tangente a $\mathcal{E}$ en P para trazar S_P. Pensemos esta vez que P está fuera de $\mathcal{E}$.

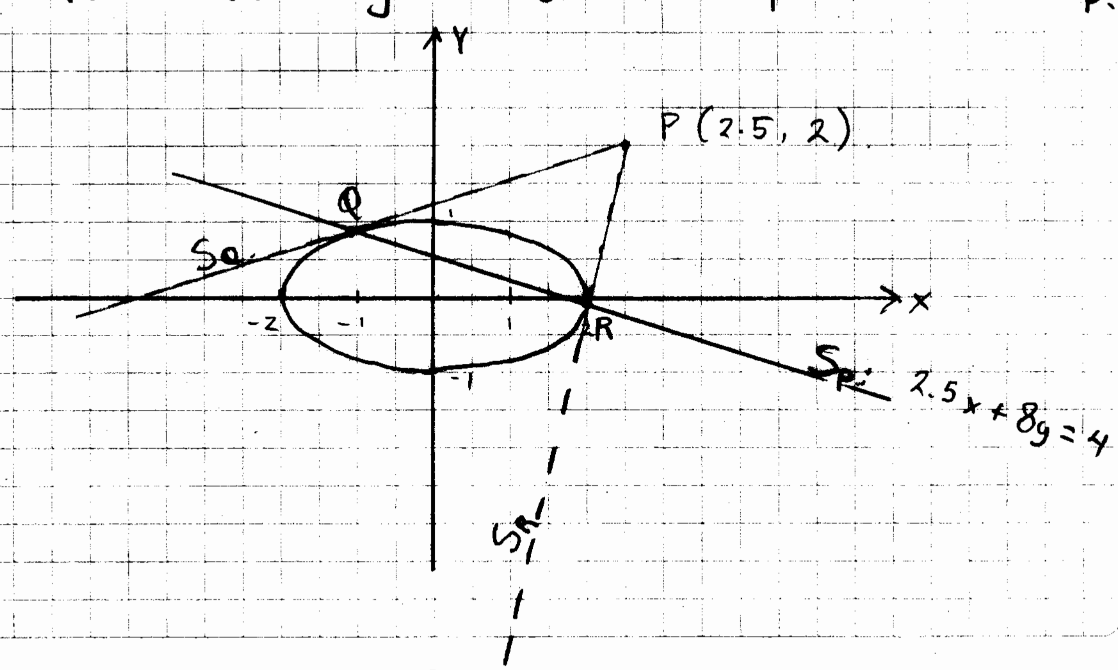
Por lo que vimos antes, S_P debe cortar a $\mathcal{E}$ en dos puntos, digamos Q y R, de coordenadas (x_q, y_q) y (x_r, y_r) respectivamente. Como $Q, R \in \mathcal{E} \Rightarrow S_Q$ y S_R son tangentes a $\mathcal{E}$ en Q y R respectivamente, como $Q, R \in S_P$ se debe cumplir lo siguiente:

① ... $x_p x_q + 4y_p y_q = 4 \wedge x_p x_r + 4y_p y_r = 4$; Q y R satisfacen S_P, pero las ecuaciones S_Q y S_R eran

$S_Q: x_q x + 4y_q y = 4$, $S_R: x_r x + 4y_r y = 4$ y por ① se tiene que tanto $P \in S_Q$, como $P \in S_R$, es decir $P = S_Q \cap S_R$, ésto nos da un método análogo con lo que usamos en la circunferencia para esbozar S_P cuando P está fuera de $\mathcal{E}$:

1.- Trazar las tangentes desde P hacia $\mathcal{E}$.
2.- Unir los puntos de tangencia obtenidos para obtener S_P.

Ejemplo:



Por último revisemos S_p cuando P está dentro de $\mathcal{E}$, sabemos ya que S_p y $\mathcal{E}$ no se cortan en ningún punto real, así que vamos a pensar en algún método que nos permita dibujar S_p sin necesidad de hacer operaciones algebráicas, lo primero que vemos es que no tenemos figuras las cuales se intersequen en puntos que determinen a S_p como en el caso anterior, por lo que quizá sea conveniente tener una idea sobre la inclinación de S_p y un punto A $\ni$ $A \in S_p$.

Consideremos el segmento que une al origen con P. éste debe cortar a $\mathcal{E}$ en un punto W, pues P está fuera de $\mathcal{E}$, vamos a probar que $S_p \parallel S_w$.

Llamemos ℓ a la recta que pasa por el origen y por P, la ecuación de ℓ carece de términos constantes por pasar por $(0,0)$, por lo que su ecuación resulta muy simple, ya que basta obtener su pendiente usando las coordenadas de P:

ℓ: $y = \frac{y_p}{x_p} x$, ahora, W es uno de los puntos de intersección de ℓ y $\mathcal{E}$, éstos se obtienen sustituyendo $y = \frac{y_p}{x_p} x$ en $\mathcal{E}$:

$$x^2 + 4\frac{y_p^2}{x_p^2}x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{4}{\frac{x_p^2 + 4y_p^2}{x_p^2}}} = \frac{2x_p}{\sqrt{x_p^2 + 4y_p^2}}$$

$\Rightarrow y = \dfrac{2y_p}{\sqrt{x_p^2 + 4y_p^2}}$, estos puntos son los que hemos llamado W, y lo que se observa es que las rectas S_w tangentes a $\mathcal{E}$ son:

$$\frac{2x_p}{\sqrt{x_p^2 + 4y_p^2}}x + \frac{8y_p}{\sqrt{x_p^2 + 4y_p^2}}y = 4$$ y sus pendientes son:

$$\frac{-\frac{2x_p}{\sqrt{x_p^2+4y_p^2}}}{\frac{8y_p}{\sqrt{x_p^2+4y_p^2}}} = \frac{x_p}{4y_p};$$ que es precisamente la pendiente de S_p, con esto tenemos ya una descripción de la inclinación de S_p rápidamente:

S_p es paralela a las tangentes a $\mathcal{E}$ trazadas desde los puntos de intersección de $\mathcal{E}$ con la recta que determinan el origen y P.

Ahora sólo nos falta saber desde donde trazar la recta S_P, pues ya conocemos su inclinación.

Para ello pensemos en una cuerda de $\mathcal{E}$ $\overline{QR}$ que contenga a P, sabemos ya que S_Q y S_R son tangentes a $\mathcal{E}$ en Q y R respectivamente y que sus ecuaciones son:

$$S_Q: \; x_q x + 4y_q y = 4 \quad ; \quad S_R: \; x_r x + 4y_r y = 4$$

Dado que P no es el origen no hay cuerda que contenga a P tal que las tangentes a $\mathcal{E}$ en sus extremos no se intersequen, luego podemos pensar en un punto real $T = S_Q \cap S_R$, por lo que vimos en el caso anterior S_T contiene a $\overline{QR}$ y también entonces a P ∴

$$x_t x + 4y_t y = 4 \text{ cumple que } x_t x_p + 4y_t y_p = 4$$

que es lo mismo que $x_p x_t + 4y_p y_t = 4$ que es S_p evaluada en T, esto nos da el punto de referencia que buscábamos así que ya tenemos un método sencillo para dibujar S_p cuando P está dentro de la elipse:

1:- Trace el segmento $\overline{OP}$ y prolónguese hasta cortar a $\mathcal{E}$ en un punto W.

2:- Trace S_W la tangente a $\mathcal{E}$ en W.
3:- Trace una cuerda $\overline{QR}$ tal que $P \in \overline{QR}$
4:- Tr S_Q y S_R y sea $T = S_Q \cap S_R$
5:- Finalmente trace S_p, una paralela a S_W por T.

Ejemplo: con $P = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

$S_p: \frac{1}{2}x + 3y = 4$