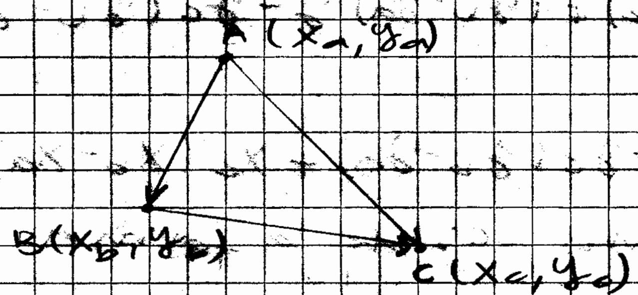
Patricia Vélez Mellado 11/feb/05
Geometría Analítica II : Trabajo 2

1. Dados los puntos $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, $C(x_c, y_c)$ que determinan un triángulo, demostrar que las alturas son concurrentes.

Sea $\Delta(ABC)$



i) La recta l_{AB} tal que: $\overline{AB} \in l_{AB}$ está dada por:

$$l_{AB}: A + s\vec{AB} = (x_a, y_a) + s(x_B - x_a, y_B - y_a).$$

~~Luego, en la recta~~ $l_1: C + t\vec{\lambda}$, ~~pertenece~~ la altura sobre el lado $\overline{AB}$, y debe de satisfacer:

•) $C \in l_1$; ••) $l_{AB} \perp l_1$, i.e. $\vec{\lambda} \perp \vec{AB}$

Para que se satisfaga (••) es necesario y suficiente: $\vec{\lambda} \cdot \vec{AB} = 0$, i.e.

$$(x_\lambda, y_\lambda) \cdot (x_b - x_a, y_b - y_a) = 0$$

$$x_\lambda(x_b - x_a) + y_\lambda(y_b - y_a) = 0$$

lo que tiene una infinidad de sol, pero tomando

$x_\lambda = y_b - y_a$, se obtiene: $y_\lambda = x_a - x_b$

$\Rightarrow \vec{\lambda} = (y_b - y_a, x_a - x_b)$, por lo que

$$l_1: C + t\vec{\lambda} = (x_c, y_c) + t(y_b - y_a, x_a - x_b)$$

$\Rightarrow x = x_c + t(y_b - y_a)$; $y = y_c + t(x_a - x_b)$

igualando t:

$$\frac{x-x_c}{y_b-y_a}=\frac{y-y_c}{x_a-x_b}$$

$$(x_a-x_b)x - x_c(x_a-x_b) = (y_b-y_a)y - y_c(y_b-y_a)$$

igualando a cero:

l_1: $(x_a-x_b)x + (y_a-y_b)y + y_c(y_b-y_a) + x_c(x_b-x_a) = 0$

de donde se obtiene una ec. de la forma

$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0$, con

$\alpha_1 = x_a - x_b$; $\beta_1 = y_a - y_b$; $\gamma_1 = y_c(y_b-y_a) + x_c(x_b-x_a)$

ii) La recta l_{BC}, tal que, $\overline{BC} \in l_{BC}$ está dada por:

$$l_{BC}: B + K\overrightarrow{BC} = (x_b, y_b) + K(x_c - x_b, y_c - y_b)$$

luego, l_2: $A + h\overrightarrow{\alpha}$ es la recta que representa a la altura del Δ sobre $\overline{BC}$, y debe de satisfacer:

$\bullet$) $A \in l_2$

$\bullet\bullet$) $l_2 \perp l_{BC}$, i.e., $\overrightarrow{\alpha} \perp \overrightarrow{BC}$

Para $(\bullet\bullet)$ es necesario y suficiente que:

$$\overline{\alpha} \cdot \overline{BC} = 0$$

$$(x_\alpha, y_\alpha) \cdot (x_c - x_b, y_c - y_b) = 0$$

$$x_a(x_c - x_b) + y_a(y_c - y_b) = 0$$

tomando $x_a = y_c - y_b$, resulta $y_a = x_b - x_c$,

$\Rightarrow \overrightarrow{\alpha} = (y_c - y_b, x_b - x_c)$

$\Rightarrow l_2: \overrightarrow{A} + h\overrightarrow{\alpha} = (x_a, y_a) + h(y_c - y_b, x_b - x_c)$

$\Rightarrow x = x_a + h(y_c - y_b)$; $y = y_a + h(x_b - x_c)$

igualando h:

$(x_b - x_c)(x - x_a) = (y - y_a)(y_c - y_b)$

$(x_b - x_c)x - x_a(x_b - x_c) = y(y_c - y_b) - y_a(y_c - y_b)$

igualando a cero

l_2: $(x_b - x_c)x + (y_b - y_c)y + x_a(x_c - x_b) + y_a(y_c - y_b) = 0$; una ec. de la forma

$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0$

con: $\alpha_2 = (x_b - x_c)$; $\beta_2 = y_b - y_c$;

$\gamma_2 = x_a(x_c - x_b) + y_a(y_c - y_b)$

iii) La recta l_{AC}, tal que, $\overline{AC} \in l_{AC}$ está dada por:

$l_{AC}: A + m\overrightarrow{AC} = (x_a, y_a) + m(x_c - x_a, y_c - y_a)$

Luego,

sea $l_3 : B + m\vec{\beta}$, tal que:

•) $B \in l_3$; ••) $l_3 \perp l_{AC}$, i.e, $\overrightarrow{AC} \perp \beta$

la altura sobre AC pertenece a l_3.

Por otro lado:

$(••) \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \vec{\beta} = 0$

por lo que $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{\beta} = (x_c - x_a, y_c - y_a)(x_\beta, y_\beta) = 0$

$x_\beta(x_c - x_a) + y_\beta(y_c - y_a) = 0$

tomando $x_\beta = y_c - y_a$, resulta

$y_\beta = x_a - x_c$

$\Rightarrow \vec{\beta} = (y_c - y_a, x_a - x_a)$

Por lo que $l_3 : B + m\vec{\beta} = B + m(y_c - y_a, x_a - x_c)$

$\Rightarrow l_3 : (x_b, y_b) + m(y_c - y_a, x_a - x_c)$

$\Rightarrow x = x_b + m(y_c - y_a)$; $y = y_b + m(x_a - x_c)$

igualando m

$(x - x_b)(x_a - x_c) = (y - y_b)(y_c - y_a)$

$(x_a - x_c)x - x_b(x_a - x_c) = y(y_c - y_a) - y_b(y_c - y_a)$

igualando a cero:

$l_3 : (x_a - x_c)x + (y_a - y_c)y + x_b(x_c - x_a) + y_b(y_c - y_a) = 0$

resulta una ec de la forma $\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 = 0$

con:

$\alpha_3 = x_a - x_c$; $\beta_3 = y_a - y_c$;

$\gamma_3 = x_b(x_c - x_a) + y_b(y_c - y_a)$

iv) Para que tres rectas $l_I: \alpha_I x + \beta_I y + \gamma_I = 0$, $l_{II}: \alpha_{II} x + \beta_{II} y + \gamma_{II}$; $l_{III}: \alpha_{III} x + \beta_{III} y + \gamma_{III} = 0$ concurran debe de cumplirse:

$$\begin{vmatrix} \alpha_I & \beta_I & \gamma_I \\ \alpha_{II} & \beta_{II} & \gamma_{II} \\ \alpha_{III} & \beta_{III} & \gamma_{III} \end{vmatrix} = 0$$

Para l_1, l_2, l_3 se tiene

$$\begin{vmatrix} x_a - x_b & y_a - y_b & y_c(y_b - y_a) + x_c(x_b - x_a) \\ x_b - x_c & y_b - y_c & x_a(x_c - x_b) + y_a(y_c - y_b) \\ x_a - x_c & y_a - y_c & x_b(x_c - x_a) + y_b(y_c - y_a) \end{vmatrix}$$

Haciendo

$A = x_a - x_b$; $B = y_a - y_b$; $C = x_b - x_c$; $D = y_b - y_c$,

$E = x_a - x_c$; $F = y_a - y_c$

$$\begin{vmatrix} A & B & -Ax_c - By_c \\ C & D & -Cx_a - Dy_a \\ E & F & -Ex_b - Fy_b \end{vmatrix}$$

$$= A[D(-Ex_b - Fy_b) - F(-Cx_a - Dy_a)]$$
$$-B[C(-Ex_b - Fy_b) - E(Cx_a - Dy_a)]$$
$$+(Ax_c - By_c)[CF - DE]$$
$$= Ex_b[-AD + BC] + Fy_b[-AD + BC] + Cx_a[-AF + EB] + Dy_a[-AF$$
$$+ EB] + (-Ax_c - By_c)(CF - DE]$$
$$= [BC - AD][Fy_b + Ex_b] + [EC - AF][Cx_a - Dy_a] +$$
$$[-Ax_c - By_c][CF - DE] = 0$$

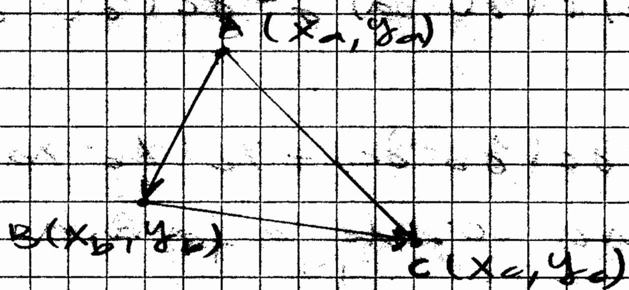
$\therefore$ l_1, l_2, l_3 son concurrentes

Patricia Vélez Mellado 11/feb/05

Geometría Analítica II: Trabajo 2

1. Dados los puntos $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, $C(x_c, y_c)$ que determinan un triángulo, demostrar que las alturas son concurrentes.

Sea $\Delta(ABC)$



i) La recta l_{AB} tal que $\overline{AB} \in l_{AB}$ está dada por:

$$l_{AB}: A + s\overrightarrow{AB} = (x_a, y_a) + s(x_B - x_a, y_B - y_a).$$

Luego, un vector $l_1: C + t\vec{\lambda}$, pertenece la altura sobre el lado AB, y debe de satisfacer:

$\bullet)$ $C \in l_1$; $\bullet\bullet)$ $l_{AB} \perp l_1$, i.e. $\vec{\lambda} \perp \overrightarrow{AB}$

Para que se satisfaga $(\bullet\bullet)$ es necesario y suficiente:

$$\vec{\lambda} \cdot \overline{AB} = 0, \text{ i.e.}$$

$$(x_\lambda, y_\lambda) \cdot (x_b - x_a, y_b - y_a) = 0$$

$$x_\lambda(x_b - x_a) + y_\lambda(y_b - y_a) = 0$$

lo que tiene una infinidad de sol, pero tomando

$x_\lambda = y_b - y_a$, se obtiene: $y_\lambda = x_a - x_b$

$\Rightarrow \vec{\lambda} = (y_b - y_a, x_a - x_b)$, por lo que

$$l_1: C + t\vec{\lambda} = (x_c, y_c) + t(y_b - y_a, x_a - x_b)$$

$\Rightarrow x = x_c + t(y_b - y_a)$; $y = y_c + t(x_a - x_b)$

igualando t:

$$\frac{x-x_c}{y_b-y_a}=\frac{y-y_c}{x_a-x_b}$$

$$(x_a-x_b)x-x_c(x_a-x_b)=(y_b-y_a)y-y_c(y_b-y_a)$$

igualando a cero:

$$l_1: (x_a-x_b)x+(y_a-y_b)y+y_c(y_b-y_a)+x_c(x_b-x_a)=0$$

de donde se obtiene una ec. de la forma

$\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1=0$, con

$\alpha_1=x_a-x_b$; $\beta_1=y_a-y_b$; $\gamma_1=y_c(y_b-y_a)+x_c(x_b-x_a)$

ii) La recta l_{BC}, tal que, $\overline{BC}\in l_{BC}$ está dada por:

$$l_{BC}: B+K\overrightarrow{BC}=(x_b,y_b)+K(x_c-x_b,y_c-y_b)$$

luego, $l_2: A+h\overrightarrow{\alpha}$ es la recta que representa a la altura del Δ sobre $\overline{BC}$, y debe de satisfacer:

•) $A\in l_2$

••) $l_2\perp l_{BC}$, i.e., $\overrightarrow{\alpha}\perp\overrightarrow{BC}$

Para (••) es necesario y suficiente que:

$$\overline{\alpha}\cdot\overline{BC}=0$$

$$(x_\alpha,y_\alpha)\cdot(x_c-x_b,y_c-y_b)=0$$

$$x_a(x_c-x_b)+y_a(y_c-y_b)=0$$

tomando $x_a=y_c-y_b$, resulta $y_a=x_b-x_c$,

$\Rightarrow \overrightarrow{\alpha}=(y_c-y_b,x_b-x_c)$

$\Rightarrow l_2: \overrightarrow{A}+h\overrightarrow{\alpha}=(x_a,y_a)+h(y_c-y_b,x_b-x_c)$

$\Rightarrow x=x_a+h(y_c-y_b)$; $y=y_a+h(x_b-x_c)$

igualando h:

$(x_b-x_c)(x-x_a)=(y-y_a)(y_c-y_b)$

$(x_b-x_c)x-x_a(x_b-x_c)=y(y_c-y_b)-y_a(y_c-y_b)$

igualando a cero

$l_2: (x_b-x_c)x+(y_b-y_c)y+x_a(x_c-x_b)+y_a(y_c-y_b)=0$; una ec. de la forma

$\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2=0$