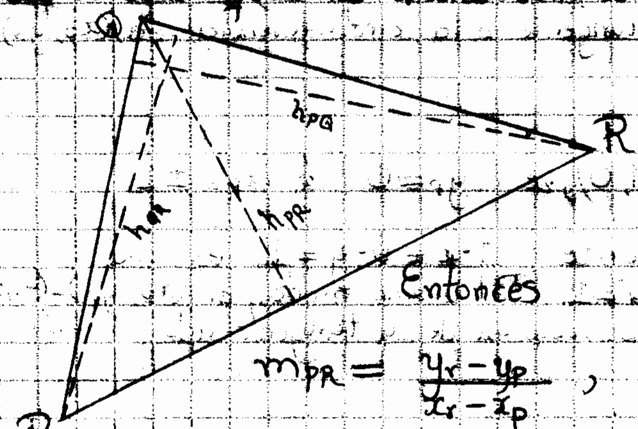
Geometría Analítica 2

Tarea 2

Mendoza Luna Luis Guillermo.

Problema 1.

Sean $P(x_p,y_p)$, $Q(x_q,y_q)$, $R(x_r,y_r)$ los vértices de un triángulo. Demostrar que las alturas son concurrentes.



Denotaremos con m_{PR}, m_{QR} y m_{PQ} las pendientes de las rectas $\overleftrightarrow{PR}$, $\overleftrightarrow{QR}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$, respectivamente y con $^{\perp}m_{PR}$, $^{\perp}m_{QR}$ y $^{\perp}m_{PQ}$ las pendientes de las rectas perpendiculares respectivas.

Entonces

$$m_{PR} = \frac{y_r-y_p}{x_r-x_p}, \quad m_{QR} = \frac{y_r-y_q}{x_r-x_q} \quad m_{PQ} = \frac{y_q-y_p}{x_q-x_p}$$

por lo que

$$^{\perp}m_{PR} = \frac{x_r-x_p}{y_p-y_r}, \quad ^{\perp}m_{QR} = \frac{x_r-x_q}{y_q-y_r} \quad ^{\perp}m_{PQ} = \frac{x_q-x_p}{y_p-y_q}$$

Sean h_{PR}, h_{QR} y h_{PQ} las alturas cuyos pies están en $\overleftrightarrow{PR}$, $\overleftrightarrow{QR}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$. De la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta:

$$h_{PR}: \quad y-y_q = \frac{x_r-x_p}{y_p-y_r}(x-x_q) \iff (x_p-x_r)x+(y_p-y_r)y+[y_q(y_r-y_p)+x_q(x_r-x_p)]=0$$

$$h_{QR}: \quad y-y_p = \frac{x_r-x_q}{y_q-y_r}(x-x_p) \iff (x_q-x_r)x+(y_q-y_r)y+[y_p(y_r-y_q)+x_p(x_r-x_q)]=0$$

$$h_{PQ}: \quad y-y_r = \frac{x_q-x_p}{y_p-y_q}(x-x_r) \iff (x_p-x_q)x+(y_p-y_q)y+[y_r(y_q-y_p)+x_r(x_q-x_p)]=0$$

Sean $\alpha := x_q-x_p$, $\beta := x_r-x_p$, $\gamma := x_r-x_q$, $\delta := y_q-y_p$, $\epsilon := y_r-y_p$, $\varphi := y_r-y_q$. Si formamos la matriz formada por los coeficientes del sistema de ecuaciones anterior, vemos que su determinante es

$$\begin{vmatrix} -\alpha & -\delta & y_r\delta+x_r\alpha \\ -\beta & -\epsilon & y_q\epsilon+x_q\beta \\ -\gamma & -\varphi & y_p\varphi+x_p\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \delta & y_r\delta+x_r\alpha-(x_r\alpha+y_r\delta) \\ \beta & \epsilon & y_q\epsilon+x_q\beta-(y_q\epsilon+x_q\beta) \\ \gamma & \varphi & y_p\varphi+x_p\gamma-(y_p\varphi+x_p\gamma) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \delta & 0 \\ \beta & \epsilon & 0 \\ \gamma & \varphi & 0 \end{vmatrix} = 0$$

puesto que a cada vector columna se le puede sumar cualquier combinación lineal de vectores columna restantes sin alterar el valor del determinante.

Mendoza Luna Luis Guillermo.

$\therefore h_{PR}, h_{PQ}, h_{QR}$ son concurrentes.

PROBLEMA 2.

Si (x_p, y_p) es un punto sobre la circunferencia $x^2+y^2=1$, demostrar que $xx_p+yy_p=1$ es la ecuación de la tangente a la circunferencia en (x_p, y_p).

Vamos a considerar dos casos:

a) $(x_p, y_p)=(1,0)$ ó $(x_p, y_p)=(-1,0)$, i.e. $y_p=0$ ó $x_p=\pm 1$.

Ahora, si $(x_p, y_p)=(1,0)$, claramente $1\cdot x+0\cdot y=1$ es una ecuación de la recta tangente a $x^2+y^2=1$. Del mismo modo, si $(x_p, y_p)=(-1,0)$ $-1\cdot x+0\cdot y=1 \iff x=-1$ es ecuación de la tangente a la circunferencia unitaria en $(-1,0)$.

b) Supongamos $y_p\neq 0$. y $x_p\neq\pm 1$

No hay pérdida de generalidad si suponemos que la ecuación de la recta buscada tiene la forma $y=mx+b$, pues los casos en que la recta buscada es vertical han sido cubiertos ya.

Contamos con las siguientes dos ecuaciones:

$$x_p^2+y_p^2=1$$

$$y_p=mx_p+b$$

Sustituyendo la segunda en la primera se obtiene

$$x_p^2+(mx_p+b)^2=1$$

$$\Rightarrow x_p^2+m^2x_p^2+2mx_pb+(b^2-1)=0$$

Tenemos ahora una ecuación cuadrática en x_p, y por la condición de que la recta debe ser tangente (y no secante ni ajena), el discriminante de esta ecuación debe ser 0. (así aseguramos que x_p tenga un valor real y sólo uno). Así:

$$4m^2b^2-4(m^2+1)(b^2-1)=0$$

$$\Rightarrow m^2b^2-(m^2b^2-m^2+b^2-1)=0$$

$$\Rightarrow m^2-b^2+1=0$$

$$\Rightarrow b^2=m^2+1$$

Mendoza Luna Luis Guillermo.

Sustituyendo la relación $b = y_p - mx_p$ en esta última ecuación obtenemos:

$$(y_p - mx_p)^2 = m^2 + 1$$

$$\Rightarrow y_p^2 - 2my_px_p + m^2x_p^2 = m^2 + 1$$

$$\Rightarrow m^2(x_p^2 - 1) - m(2x_py_p) + (y_p^2 - 1) = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática en m, cuyo discriminante es

$$4x_p^2y_p^2 - 4(x_p^2 - 1)(y_p^2 - 1) = 4[x_p^2y_p^2 - (x_p^2y_p^2 - x_p^2 - y_p^2 + 1)] = 0$$

(en la última igualdad usamos el hecho de que $x_p^2 + y_p^2 = 1 \Leftrightarrow -x_p^2 - y_p^2 + 1 = 0$)

Entonces, $m = \frac{2x_py_p}{2(x_p^2-1)} = \frac{x_py_p}{(x_p^2-1)} = \frac{x_py_p}{-y_p^2} = -\frac{x_p}{y_p}$

Nótese que $x_p^2 - 1 \neq 0$ por la hipótesis $x_p \neq \pm 1$.

Sustituyendo este valor de m en la ecuación de la recta tangente, encontramos:

$$b = y_p - mx_p = y_p - \left(\frac{-x_p}{y_p}\right)x_p = \frac{y_p^2 + x_p^2}{y_p} = \frac{1}{y_p}$$

$\therefore$ La ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en (x_p, y_p) es

$$y = -\frac{x_p}{y_p}x + \frac{1}{y_p}$$

$$\Leftrightarrow y_py = -x_px + 1$$

$$\Leftrightarrow x_px + y_py = 1,$$

como se quería. #