Geometría Analítica II — Trabajo 26
Juan Salvador Garza Ledesma — 16-mayo-2005

1.- Considere el hiperboloide de una hoja

$$\mathcal{H}_H : x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 1$$

Observe el plano tangente al hiperboloide en el punto $(0, 1/\sqrt{2}, 1/3)$. Encuentre las rectas que se forman al intersecar este plano con el hiperboloide.

Recordemos que usando la notación matricial $\mathcal{H}_H$ se puede escribir como:

$$p^t A p - 1 = 0 ; \quad p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Haciendo $p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/3 \end{pmatrix}$ se llegó a que el plano Π_0 tangente a $\mathcal{H}_H$ en p_0 era:

$$p_0^t A p - 1 = 0 \iff (0, 1/\sqrt{2}, 1/3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \iff$$

$$\iff 2\sqrt{2}y - 3z = 1 \iff z = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}y - 1) \quad \ldots *$$

La idea ahora era sustituir $*$ en la ecuación de $\mathcal{H}_H$ para obtener una expresión en x, y la cual pudiera manipularse algebraicamente hasta quedar en la forma

$\varphi^2 - \sigma^2 = 0$ con φ y σ expresiones para x e y, pues esto llevaría a una factorización inmediata que nos daría la ecuación de dos planos que junto con $*$ generarían las dos rectas que deseamos.

$$z = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}y - 1) \wedge x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 4y^2 - (2\sqrt{2}y - 1)^2 = 1 \iff x^2 + 4y^2 - 8y^2 + 4\sqrt{2}y - 2 = 0$$

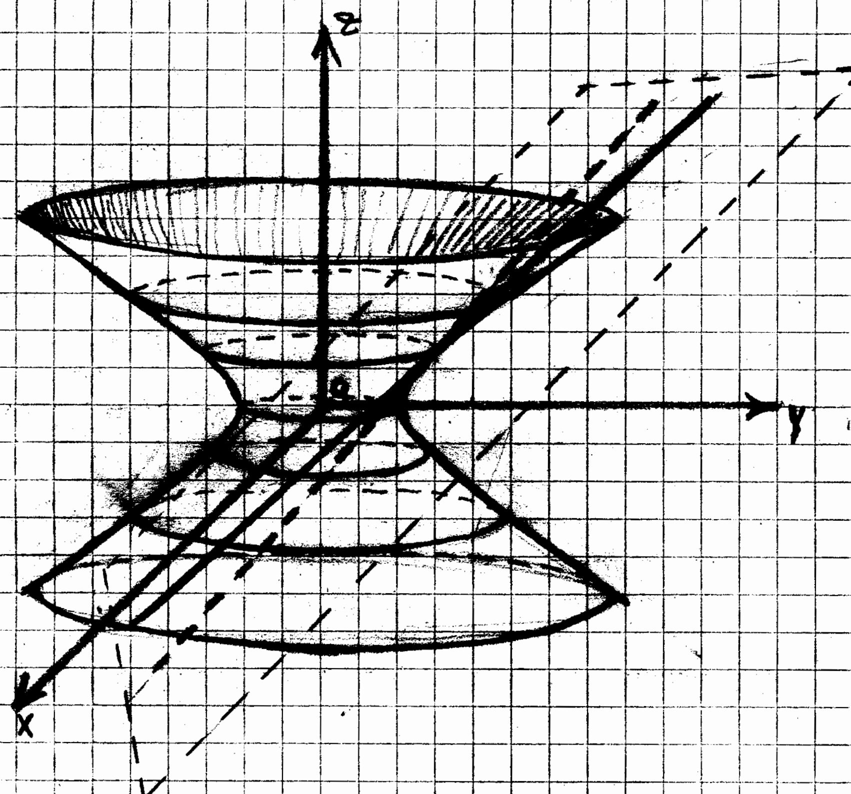
$$\iff x^2 - (4y^2 - 4\sqrt{2}y + 2) = 0 \iff x^2 - (2y - \sqrt{2})^2 = 0 \iff$$

$$\iff (x + 2y - \sqrt{2})(x - 2y + \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}y - 1\right) \wedge x + 2y - \sqrt{2} = 0 \quad \vee$$

$$z = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}y - 1\right) \wedge x - 2y + \sqrt{2} = 0$$

es decir, el plano que mejor aproxima a $\mathcal{H}_H$ cerca de p_0 corta a $\mathcal{H}_H$ en estas dos rectas:



2.- Ahora considere el hiperboloide de dos hojas

$$\mathcal{H}_E \ldots \quad x^2 - 4y^2 - 9z^2 = 1$$

Obtenga las intersecciones del hiperboloide con su plano tangente en los puntos:

a) $P_1^t = (1, 0, 0)$

Nuevamente usemos la ecuación matricial del plano tangente.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \mathcal{H}_E: \quad p^t A p - 1 = 0$$

$$\Pi_{P_1}: \quad P_1^t A p - 1 = 0 \Leftrightarrow (1, 0, 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Rightarrow$ $x = 1$, sustituyendo en $\mathcal{H}_E$ tenemos:

$$\cancel{x} - 4y^2 - 9z^2 = \cancel{1} \Leftrightarrow (2y)^2 + (9z)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$z = 0 = y$ $\therefore$ Π_{p_1} además de ser el plano que mejor aproxima a $\mathcal{H}_E$ cerca de P_1 sólo lo toca en este punto.

Similarmente para el punto $p_2^t = (\sqrt{2}, 1/2, 0)$ tenemos al plano tangente:

$$\Pi_{p_2}: \; p_1^t A p - 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}, 1/2, 0)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}x - 1) \dots **$$

Sustituyendo en $\mathcal{H}_E$ para buscar las intersecciones:

$$x^2 - (\sqrt{2}x - 1)^2 - 9z^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + 9z^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{2})^2 + 9z^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{2})^2 + (3z)^2 = 0$$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \wedge z = 0$, $\therefore$ nuevamente Π_{p_2} sólo corta a $\mathcal{H}_E$ en el punto P_2: