Geometría Analítica II — Trabajo 25

Juan Salvador Garza Ledesma — 11 - mayo - 2005

1.- Mediante traslación de los ejes coordenados, muestra que la superficie definida por la ecuación $2x^2+3y^2+4z^2-4x-6y+16z+16=0$ es un elipsoide. Encuentra las coordenadas de su centro y las longitudes de sus semiejes.

Podemos manipular un poco la ecuación dada:

$$2x^2+3y^2+4z^2-4x-6y+16z+16=0 \iff$$

$$\iff 2(x^2-2x)+3(y^2-2y)+4(z^2+4z)+16=0 \iff$$

$$\iff 2(x-1)^2+3(y-1)^2+4(z+2)^2=-16+2+3+16=5$$

Mediante la transformación:

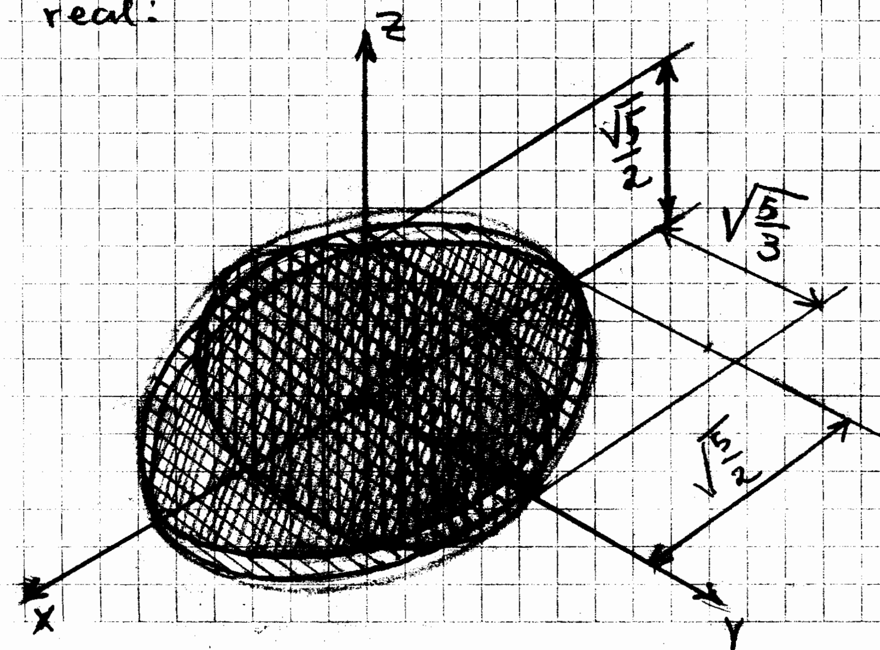
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Que es una traslación al punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ que es el centro de la figura.

Obtenemos:

$$\frac{x'^2}{\frac{5}{2}} + \frac{y'^2}{\frac{5}{3}} + \frac{z'^2}{\frac{5}{4}} = 1$$

Que representa un elipsoide cuyos semiejes miden $\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{5}$, aunque de observar la ecuación original, y ver que los 3 términos cuadráticos tenían coeficiente positivo se pudo haber dicho que la superficie era un elipsoide (real o imaginario) en este caso real:



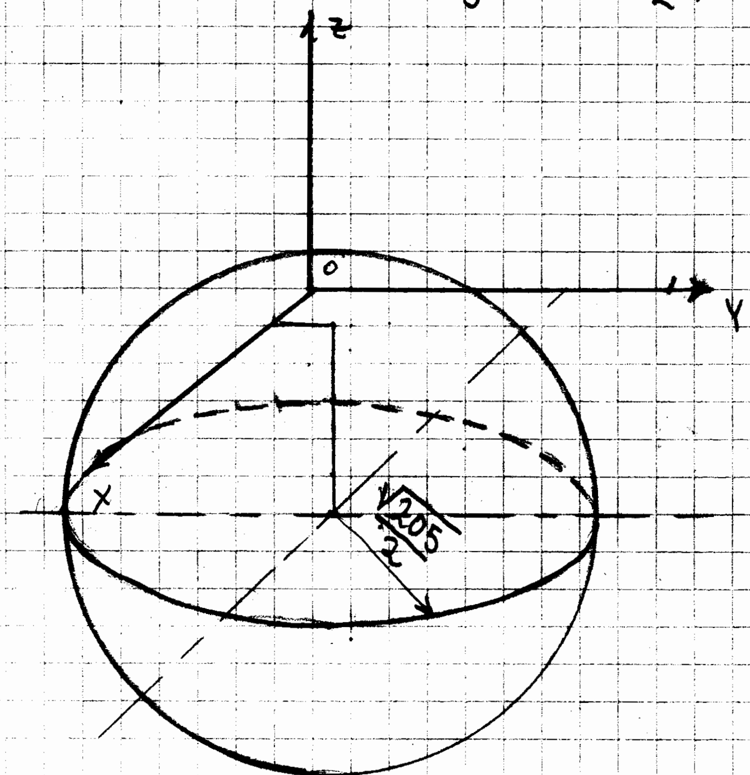
2- Clasifica y describe la superficie $x^2+y^2-4x-3y+10z=20-z^2$

$$x^2+y^2-4x-3y+10z=20-z^2 \Longleftrightarrow (x-2)^2+(y-\tfrac{3}{2})^2+(z+5)^2=20+$$
$$+4+\frac{9}{4}+25=\frac{205}{4}$$

De aquí observamos facilmente que $x^2+y^2-4x-3y+10z=20-z^2$ representa la esfera:

$$(x-2)^2+(y-\tfrac{3}{2})^2+(z+5)^2=\frac{205}{4}$$

con centro en $(2, \frac{3}{2}, -5)$ y radio $\frac{1}{2}\sqrt{205} \approx 7.159$



3- Muestra que la superficie $2x^2-3z^2-5z=7-2y^2$ es una superficie de revolución. Encuentra las ecuaciones de la curva generadora.

La ecuación dada puede ponerse como:

$$2x^2+2y^2-3\left(z^2+\frac{5}{3}z\right)=7 \iff$$

$$\iff 2x^2+2y^2-3\left(z+\frac{5}{6}\right)^2=7-\frac{75}{36}=\frac{177}{36}$$

$$\iff \frac{x^2}{\frac{177}{72}}+\frac{y^2}{\frac{177}{72}}-\frac{\left(z+\frac{5}{6}\right)^2}{\frac{177}{108}}=1$$

Que es un hiperboloide de una hoja, pero poniéndolo como:

$$\frac{x^2}{\frac{177}{72}}+\frac{y^2}{\frac{177}{72}}=1+\frac{\left(z+\frac{5}{6}\right)^2}{\frac{177}{108}}$$

Observamos que $\forall z\in\mathbb{R}$ fijo, $z=k$ este plano interseca al hiperboloide en la circunferencia:

$$\bigstar \begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{177\alpha}{72} \\ z=k \end{cases}; \text{ donde } \alpha=1+\frac{\left(k+\frac{5}{6}\right)^2}{\frac{177}{108}}$$

Así, podemos interpretar a la superficie como aquella obtenida al hacer girar la hipérbola

$$y=0 \wedge \frac{x^2}{\frac{177}{72}}-\frac{\left(z+\frac{5}{6}\right)^2}{\frac{177}{108}}=1 \quad \text{al rededor del eje } Z.$$

Pues como ya vimos cualquier sección del hiperboloide con un plano ortogonal al eje Z es una circunferencia y además éstas tienen siempre centro en $(0,0,k)$ por $\bigstar$, vemos que la recta de los centros de estas circunferencias es precisamente Z, lo cual justifica que lo tomemos como eje de revolución.

4.- En el hiperboloide de una hoja $x^2+y^2-z^2=1$ encuentra las ecuaciones de las dos líneas que pasan por $(1,0,0)$ y por $(-1,0,0)$ que están contenidas en la superficie.

En este caso nos han dado puntos muy simples, y podemos encontrar las líneas deseadas sin necesidad de usar los resultados vistos en clase, pues $(1,0,0)$ pertenece a la superficie y también al plano $x=1$, así que podemos ver a las rectas que nos piden como la intersección del hiperboloide y el plano $x=1$ que lo corta precisamente en dos rectas:

$$x=1 \Rightarrow \cancel{1}+y^2-z^2=\cancel{1} \Leftrightarrow (y+z)(y-z)=0 \Rightarrow$$

$y+z=0 \lor y-z=0$ $\therefore$ las rectas buscadas son:

$$x=1 \land y+z=0 \; ; \quad x=1 \land y-z=0$$

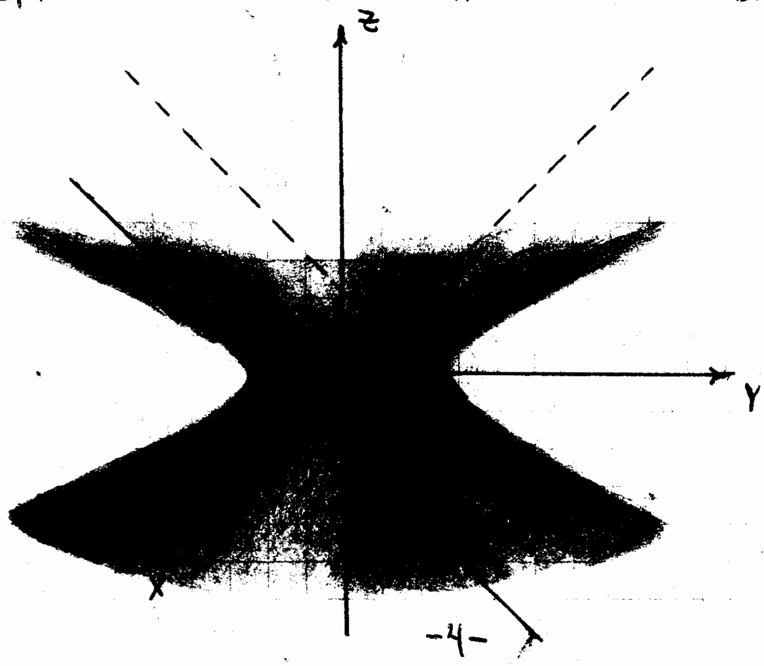
Análogamente con $x=-1$:

$$x=-1 \Rightarrow 1+y^2-z^2=1 \Leftrightarrow (y+z)(y-z)=0 \Rightarrow$$

$$x=-1 \land y+z=0 \lor x=-1 \land y-z=0.$$

Encontrar las rectas del hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ que pasan por un punto de la forma $(\pm a,0,0)$ ó $(0,\pm b,0)$ resulta de esta forma siempre fácil:

(Este hiperboloide al igual que el anterior es de revolución, pues los coeficientes en los términos cuadráticos positivos son iguales).



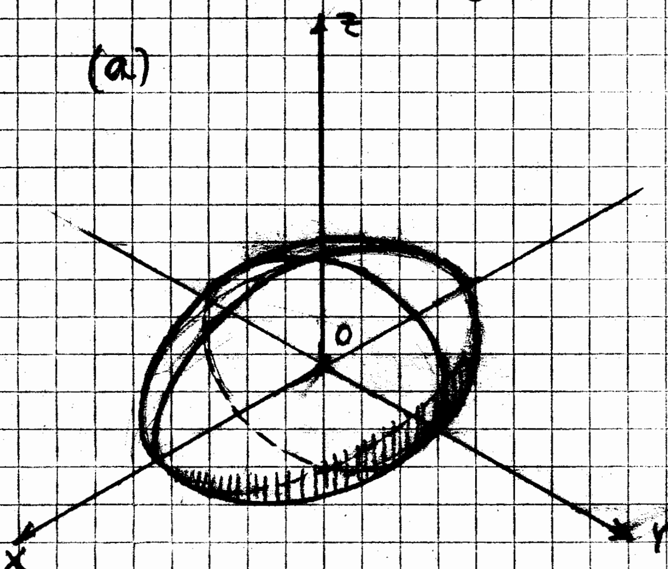
5- Clasifica y dibuja el lugar definido por las siguientes ecuaciones:

(a) $9x^2+16y^2+25z^2=1$ Este es un elipsoide:

$\left(\frac{x}{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(\frac{y}{\frac{1}{4}}\right)^2+\left(\frac{z}{\frac{1}{5}}\right)^2=1$ con semiejes de longitud $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{5}$

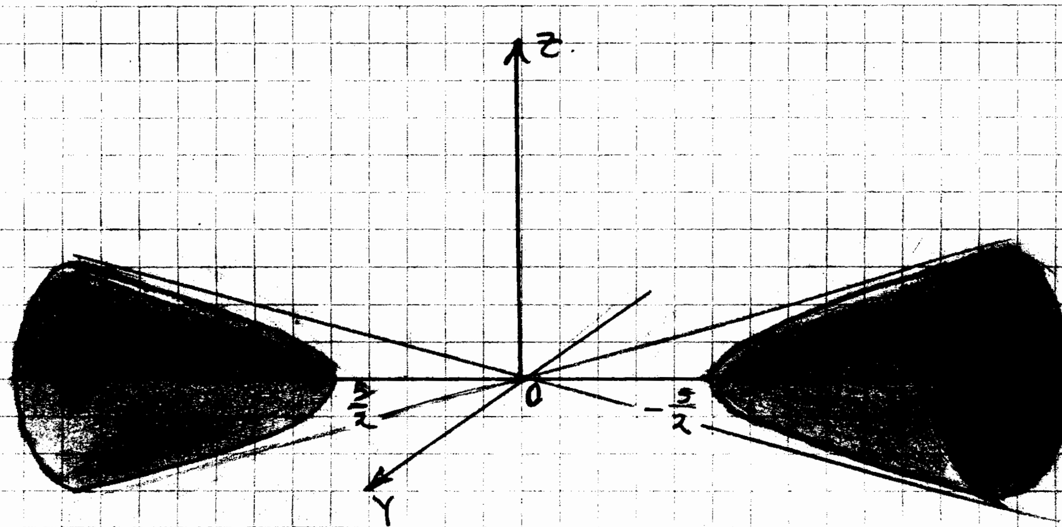
en x, y, z respectivamente y centro en el origen:

(a)



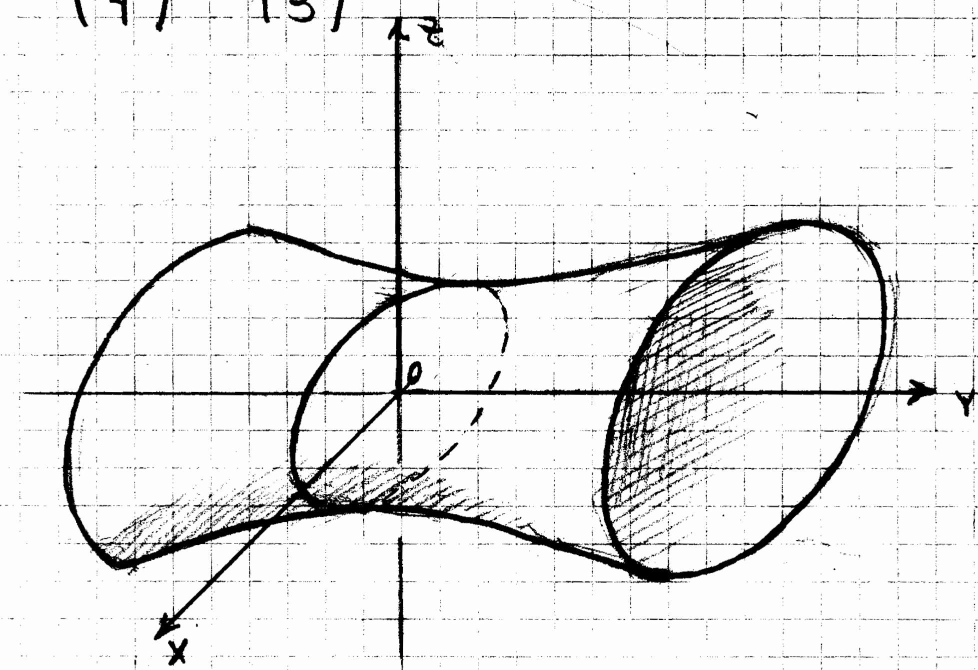
(b) $4x^2-9y^2-16z^2=25 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\frac{5}{2}}\right)^2-\left(\frac{y}{\frac{5}{3}}\right)^2-\left(\frac{z}{\frac{5}{4}}\right)^2=1$

Este es entonces un hiperboloide de 2 hojas con centro en el origen, que no existe en la región limitada por los planos $x=\pm\frac{5}{2}$, salvo por ser tangente a ambos en los puntos: $(\pm\frac{5}{2},0,0)$, pues si $|x|<\frac{5}{2} \Rightarrow \left(\frac{x}{\frac{5}{2}}\right)^2<1 \Rightarrow \left(\frac{x}{\frac{5}{2}}\right)^2-1<0$ y $\left(\frac{y}{\frac{5}{3}}\right)^2+\left(\frac{z}{\frac{5}{4}}\right)^2$ nunca es negativo, fuera de esta región la superficie existe y como sabemos, debido a esto tiene una forma simétrica con dos 'híbridos de elipse e hipérbola' o 'dos hojas':



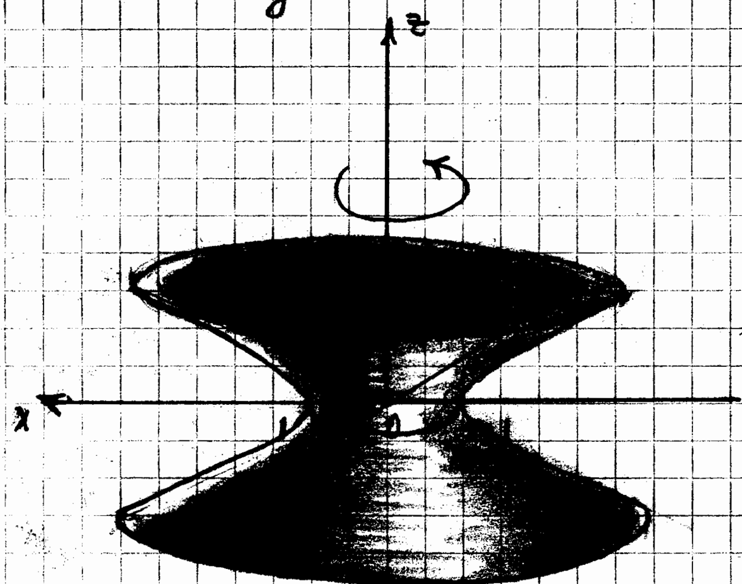
(c) $4x^2 - 16y^2 + 9z^2 = 25$ Como ya los hemos visto muchas veces éste es un hiperboloide de una hoja, gracias su única diferencia es que éste no tiene posición vertical, es decir, su eje coincide en este caso con el eje Y, pues al hacer $y = cte$ obtenemos elipses en X, Z, podemos finalmente escribir la ecuación en la forma habitual para identificar rápidamente las longitudes de los semiejes de la figura!

$$\left(\frac{x}{\frac{5}{2}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\frac{5}{4}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\frac{5}{3}}\right)^2 = 1;$$



(d) $x^2+y^2-4z^2=25 \iff \left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{5}\right)^2-\left(\frac{z}{\frac{5}{2}}\right)^2=1$;

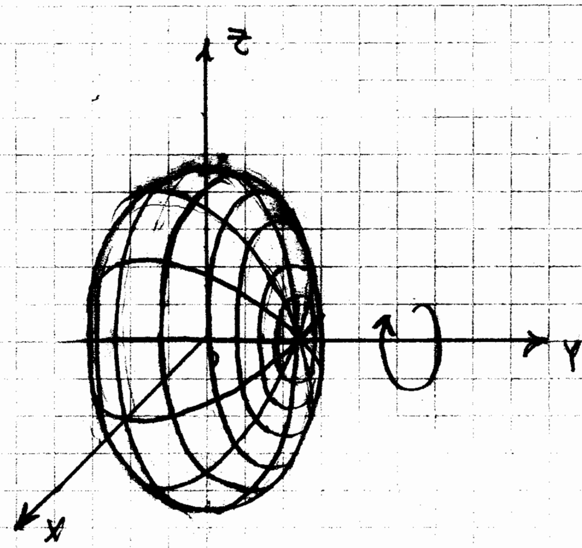
Este difiere del anterior en que está en posición vertical, y es de revolución, pues no tenemos elipses al hacer $z=$ cte, sino circunferencias por ser iguales los coeficientes en x e y.



(e). $x^2+4y^2+z^2=9 \iff \left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{\frac{3}{2}}\right)^2+\left(\frac{z}{3}\right)^2=1$

Como sabemos representa un elipsoide con centro en el origen, pero difiere del del inciso (a) no sólo en las dimensiones, sino en que se trata de un elipsoide de revolución, pues para $y=c \Rightarrow |c|<\frac{3}{2}$ obtenemos circunferencias por ser iguales los coeficientes de x y z.

En este caso se trata de un elipsoide 'achatado', pues como observamos, su eje de revolución es el eje Y y la elipse generadora; $z=0 \wedge \left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{\frac{3}{2}}\right)^2=1$ tiene su semieje menor sobre Y (el eje de revolución), pues $\frac{3}{2}<3$, se trata de un elipsoide con forma 'de planeta'.



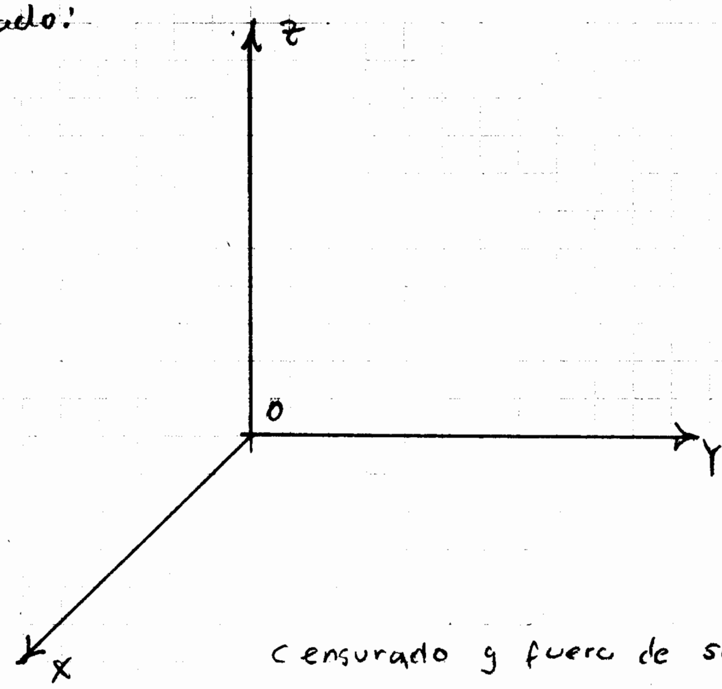
(f) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 8 = 0$

Éste está 'a todo dar' pues $\nexists\ x, y, z \in \mathbb{R} \ni$

$x^2 + 4y^2 + 9z^2 = -8$, pues el cuadrado de un número real siempre es positivo, así que este es un 'elipsoide imaginario'!

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{\frac{8}{4}} + \frac{z^2}{\frac{8}{9}} = -1$$

'No dibujable' en $\mathbb{R}^3$. ó si lo es el dibujo es muy elaborado!



censurado y fuera de serie