Mendoza Luna Luis Guillermo

Geometría Analítica 2

Tarea 2ª

Considera el hiperboloide $\mathcal{H}_S = \left\{(x,y,z) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$. Exprésalo en forma paramétrica

Sea $(x_0,y_0,z_0)\in\mathcal{H}$ un punto fijo pero electo arbitrariamente. Obtendremos condiciones bajo las cuales la recta $\bar{p}=\bar{p}_0+s\vec{u}$ se encuentra contenido por completo en $\mathcal{H}$. Digamos que los puntos (x,y,z) de la recta los expresamos como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0+su_1 \\ y_0+su_2 \\ z_0+su_3 \end{pmatrix}$$

Para que $\ell\subseteq\mathcal{H}$ necesitamos que los puntos (x,y,z) satisfagan la ecuación de $\mathcal{H}$ para cualquier valor de s. Sustituyamos las expresiones para (x,y,z) en la ecuación de $\mathcal{H}_S$

$$\frac{(x_0+su_1)^2}{a^2}+\frac{(y_0+su_2)^2}{b^2}-\frac{(z_0+su_3)^2}{c^2}=1$$

$$\iff \left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\right)+2s\left(\frac{x_0u_1}{a^2}+\frac{y_0u_2}{b^2}-\frac{z_0u_3}{c^2}\right)+s^2\left(\frac{u_1^2}{a^2}+\frac{u_2^2}{b^2}-\frac{u_3^2}{c^2}\right)=1$$

$$\iff 2s\left(\frac{x_0u_1}{a^2}+\frac{y_0u_2}{b^2}-\frac{z_0u_3}{c^2}\right)+s^2\left(\frac{u_1^2}{a^2}+\frac{u_2^2}{b^2}-\frac{u_3^2}{c^2}\right)=0.$$

Descartamos $s=0$ pues corresponde al hecho de que $\bar{p}_0\in\mathcal{H}$. Entonces tenemos

$$2\left(\frac{x_0u_1}{a^2}+\frac{y_0u_2}{b^2}-\frac{z_0u_3}{c^2}\right)+s\left(\frac{u_1^2}{a^2}+\frac{u_2^2}{b^2}-\frac{u_3^2}{c^2}\right)=0.$$

Como no queremos que el hecho de que esta ecuación se cumpla quede determinado por s, el coeficiente de s debe anularse. Entonces

$$\frac{u_1^2}{a^2}+\frac{u_2^2}{b^2}-\frac{u_3^2}{c^2}=0, \quad \frac{x_0u_1}{a^2}+\frac{y_0u_2}{b^2}-\frac{z_0u_3}{c^2}=0$$

Observemos que la ecuación de $\mathcal{H}$ puede escribirse como:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

Esto motiva a que consideremos dos rectas:

$$l_1: \quad \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

$$l_2: \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \beta\left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

Vamos a expresar α, β en términos de x_0, y_0, z_0. A partir de estas dos cantidades tendremos nuestra representación paramétrica.

Escribamos en forma conveniente l_1 y obtengamos uno de sus vectores directores:

$$l_1: \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b}\alpha - \frac{z}{c} - \alpha = 0, \quad \frac{x}{a}\alpha - \frac{y}{b} + \frac{z\alpha}{c} - 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1/a & \alpha/b & -1/c \\ \alpha/a & -1/b & \alpha/c \end{vmatrix} = \left(\frac{\alpha^2 - 1}{bc}, \frac{-2\alpha}{ac}, -\frac{1+\alpha^2}{ab}\right).$$

Sustituyendo este valor de $\vec{u}$ en la ecuación lineal en u_1, u_2, u_3:

$$\frac{x_0(\alpha^2 - 1)}{a^2bc} + \frac{y_0(-2\alpha)}{ab^2c} + \frac{z_0(\alpha^2+1)}{abc^2} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \alpha^2\left(\frac{x_0}{a^2bc} + \frac{z_0}{abc^2}\right) + \alpha\left(\frac{-2y_0}{ab^2c}\right) + \left(\frac{-x_0}{a^2bc} + \frac{z_0}{abc^2}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{\frac{2y_0}{ab^2c} \pm \sqrt{\frac{4y_0^2}{a^2b^4c^2} - 4\left(\frac{z_0}{abc^2} - \frac{x_0}{a^2bc}\right)\left(\frac{x_0}{a^2bc} + \frac{z_0}{abc^2}\right)}}{2\left(\frac{x_0}{a^2bc} + \frac{z_0}{abc^2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{2y_0}{ab^2c} \pm \sqrt{\frac{4}{a^2b^2c^2}\left(\frac{y_0^2}{b^2} + \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{z_0^2}{c^2}\right)}}{2\left(\frac{x_0}{a^2bc} + \frac{z_0}{abc^2}\right)} = \frac{\frac{2y_0}{ab^2c} \pm \frac{2}{abc}}{2\left(\frac{x_0}{a^2bc} + \frac{z_0}{abc^2}\right)} = \frac{\frac{y_0}{b} \pm 1}{\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}}.$$

$$\therefore \alpha = \frac{\frac{y_0}{b} \pm 1}{\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}}$$

De la misma manera, expresemos l_2 en forma adecuada y encontremos uno de sus vectores directores:

$$\frac{\beta x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z\beta}{c} - 1 = 0, \quad \frac{x}{a} - \frac{y\beta}{b} - \frac{z}{c} - \beta = 0$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \beta/a & 1/b & \beta/c \\ 1/a & -\beta/b & -1/c \end{vmatrix} = \left(\frac{\beta^2 - 1}{bc}, \frac{2\beta}{ac}, \frac{-1-\beta^2}{ab}\right)$$

Sustituyendo en la ecuación lineal en u_1, u_2, u_3:

$$\frac{x_0}{a^2bc}(\beta^2 - 1) + \frac{y_0}{ab^2c}(2\beta) + \frac{z_0}{abc^2}(1 + \beta^2) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x_0}{a}(\beta^2 - 1) + \frac{y_0(2\beta)}{b} + \frac{z_0}{c}(1 + \beta^2) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \beta^2\left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right) + \beta\left(\frac{2y_0}{b}\right) + \left(-\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right) = 0.$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{-\frac{2y_0}{b} \pm \sqrt{\frac{4y_0^2}{b^2} - 4\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(-\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)}}{2\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)}$$

$$= \frac{-\frac{2y_0}{b} \pm 2}{2\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)} = \frac{-\frac{y_0}{b} \pm 1}{\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}}$$

Después de hacer todo lo anterior, podemos elegir:

$$\alpha = \frac{1+{y_0}/{b}}{\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}}, \qquad \beta = \frac{1-{y_0}/{b}}{\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}}$$

Entonces, $\alpha+\beta = \dfrac{2}{\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}}$ $(\bullet)$, $\alpha-\beta = \dfrac{2\,{y_0}/{b}}{\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}}$

$$\Rightarrow \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = \frac{y_0}{b} \qquad \therefore\ y_0 = b\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)$$

Tomando este valor para y_0 y sustituyéndolo en la ecuación de $\mathcal{H}$:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 - \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right) = \left[1+\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)\right]\left[1-\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right) = \left(\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\right)\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\alpha+\beta}\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right) = \left(\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\right)\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)$$ en virtud de $(\bullet)$,

$$\Longleftrightarrow \frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

Entonces, contamos con dos ecuaciones independientes:

$$\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}, \quad \frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} = \frac{2}{\alpha+\beta}$$

En conclusión:

$$x_0 = a\frac{(1+\alpha\beta)}{\alpha+\beta}, \quad y_0 = b\frac{(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}, \quad z_0 = \frac{c(1-\alpha\beta)}{\alpha+\beta}$$

Comprobemos que los puntos (x_0, y_0, z_0) descritos con esta parametrización se encuentran en $\mathcal{H}$:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = \frac{a^2\frac{(1+\alpha\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2}}{a^2} + \frac{b^2\frac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2}}{b^2} - \frac{c^2\frac{(1-\alpha\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2}}{c^2}$$

$$= \frac{(1+\alpha\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2 - (1-\alpha\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{1 + 2\alpha\beta + \alpha^2\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - (1-2\alpha\beta+\alpha^2\beta^2)}{(\alpha+\beta)^2}$$

$$= \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}{(\alpha+\beta)^2} = \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 = 1.$$

Entonces, nuestra parametrización es correcta.