Jiménez Arteaga Bruno
Geometría Analítica

1.- Considere el hiperboloide

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z) \mid x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 1\}$$

• Suponga la relación $x - 3z = \beta(1 + 2y)$

$$x + 3z = \frac{1}{\beta}(1 - 2y)$$

y encuentre las condiciones bajo las cuales la recta $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y con el vector dirección, intersección de los planos, se encuentra en el hiperboloide

• Primero obtenemos los vectores dirección de los planos

$\therefore$ $x - 3z = \beta(1 + 2y) \Rightarrow x - 3z - \beta 2y = \beta$

$\Rightarrow (1, -2\beta, -3) \cdot (x, y, z) = \beta$

$\Rightarrow \vec{n_1} = (1, -2\beta, -3)$ es el vector dirección del plano

y $x + 3z = \frac{1}{\beta}(1 - 2y) \Rightarrow \beta x + 2y + 3\beta z = 1$

$\Rightarrow (\beta, +2, 3\beta) \cdot (x, y, z) = 1$

$\Rightarrow \vec{n_2} = (\beta, +2, 3\beta)$ es el vector dirección del plano

• Utilizando el producto vectorial entre $\vec{n_1}$ y $\vec{n_2}$ encontramos el vector dirección de la recta

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2\beta & -3 \\ \beta & +2 & 3\beta \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = [-2\beta\cdot 3\beta - (+2(-3))] - [3\beta - (-3\beta)] + [+2 - (-2\beta\cdot\beta)]$$

$$\therefore \quad \vec{u}(\beta) = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-6\beta^2 + 6,\ -6\beta,\ 2\beta^2 + 2)$$

Pero también podemos escribir a $\vec{u}(\beta) = \begin{pmatrix} 3(-\beta^2+1) \\ -3\beta \\ \beta^2+1 \end{pmatrix}$

• Ahora, con la relación $x_1^2 + 4x_2^2 - 9x_3^2 = 0$, obtenida en clase, verificamos si $\vec{u}(\beta)$ esta en el hiperboloide.

$$(3(-\beta^2+1))^2 + 4(-3\beta)^2 - 9(\beta^2+1)^2 = 0$$

$$9(\beta^4 - 2\beta^2 + 1) + 36\beta^2 - 9(\beta^4 + 2\beta^2 + 1) = 0$$

$$36\beta^2 - 36\beta^2 = 0$$

• Entonces escribimos la ecuación paramétrica de la recta por P_0

$$l_\beta = P_0 + s\,u(\beta) \Rightarrow l_\beta = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3(-\beta^2+1) \\ -3\beta \\ \beta^2+1 \end{pmatrix}$$

Por otra parte tenemos que $\mathcal{H}(p) = p^t A p$, donde

$$\mathcal{H}(P_0 + s u(\beta)) = (P_0 + s u(\beta))^t A (P_0 + s u(\beta)) = (P_0^t + s u(\beta)^t) A (P_0 + s u(\beta))$$

$$= \left(p_0^t A + s(u(\beta))^t A\right)\left(p_0 + s\vec{u}(\beta)\right)$$

$$= p_0^t A p_0 + p_0^t A s\vec{u}(\beta) + s\vec{u}(\beta)^t A p_0 + s^2 (u(\beta))^t A \vec{u}(\beta)$$

$$= s^2 (\vec{u}(\beta))^t A \vec{u}(\beta) + s\left(p_0^t A u(\beta) + \vec{u}(\beta)^t A p_0\right) + p_0^t A p_0$$

y observando el coeficiente del segundo termino obtenemos que

$$p_0^t A u(\beta) + \vec{u}(\beta)^t A p_0 = x_0 3(-\beta^2+1) + 4y_0(-3\beta) - 9z_0(\beta^2+1) + 3(-\beta^2+1)x_0$$
$$+ 4(-3\beta)y_0 - 9(\beta^2+1)z_0$$

$$= -x_0 6\beta^2 + x_0 6 - 24\beta y_0 - 18 z_0 \beta^2 - 18 z_0$$

$$= \beta^2(-18 z_0 - x_0 6) - 24\beta y_0 + (-18 z_0 + x_0 6) \quad (*)$$

donde analizando el discriminante de (*) tenemos que

$$\Delta = 24^2 y_0^2 - 4(-18 z_0 - x_0 6)(-18 z_0 + 6x_0)$$

$$= 24^2 y_0^2 + 4(18 z_0 + x_0 6)(x_0 6 - z_0 18)$$

$$= 24^2 y_0^2 + 4(x_0^2 6^2 - z_0^2 18^2)$$

$$= +4\left[x_0^2 6^2 + y_0^2 12^2 - z_0^2 18^2\right]$$

$$= +4(6^2)\left[x_0^2 + 4y_0^2 - 9z_0^2\right] = +144$$

Por lo tanto, encontramos que el valor de β_1 y β_2 es

$$\beta_1 = \frac{-24 y_0 - 12}{12(x_0 + 3z_0)} = \frac{-2y_0 - 1}{-x_0 - 3z_0} \quad \text{y} \quad \beta_2 = \frac{-2y_0 + 1}{-x_0 - 3z_0}$$

Así obtenemos que:

$$\vec{u}(\beta) = \begin{pmatrix} 3(-\beta^2-1) \\ -3\beta \\ \beta^2-1 \end{pmatrix} \text{ pasa por } P_0(x_0, y_0, z_0) \iff \beta_1 = \frac{2y_0-1}{-x_0-3z_0}$$

$$\beta_2 = \frac{2y_0+1}{-x_0-3z_0}$$

2 Generalice el procedimiento anterior para el caso

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, considerando el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$

en el hiperboloide. Encontrar las condiciones necesarias para que los vectores dirección $\vec{u}(\alpha)$ y $u(\beta)$, sean tales que las rectas que pasan por P_0 y con esos vectores dirección cada una se encuentren sobre el hiperboloide

- Factorizamos la ecuación del hiperboloide

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

- Donde

① $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \alpha\left(1 - \frac{y}{b}\right)$

$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{y}{b}\right)$

② $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \beta\left(1 + \frac{y}{b}\right)$

$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\beta}\left(1 - y/b\right)$

• Siguiendo un proceso análogo al del primer generador obtenemos los vectores dirección $\vec{u}(\alpha)$ y $\vec{u}(\beta)$

De (7) tenemos que

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \alpha\left(1 - y/b\right) \Rightarrow \frac{x}{a} - \frac{z}{c} + \alpha\frac{y}{b} = \alpha$$

$$\Rightarrow \left(1/a,\ \alpha/b,\ -1/c\right)\cdot\left(x, y, z\right) = 1$$

$$\Rightarrow \left(1/a,\ \alpha/b,\ -1/c\right) = \vec{n}_1$$

y

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{y}{b}\right) \Rightarrow \frac{\alpha x}{a} + \frac{\alpha z}{c} - \frac{y}{b} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\alpha/a,\ -1/b,\ \alpha/c\right)\cdot\left(x, y, z\right) = 1$$

$$\Rightarrow \vec{n}_2 = \left(\alpha/a,\ -1/b,\ \alpha/c\right)$$

• Entonces conseguimos el vector dirección $\vec{u}(\alpha)$ con el producto vectorial de $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$

$$\vec{u}(\alpha) = \vec{n}_2 \times \vec{n}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha/a & -1/b & \alpha/c \\ 1/a & \alpha/b & -1/c \end{vmatrix}$$

$$\vec{u}(\alpha) = \left[\left(\frac{1}{b\cdot c} - \frac{\alpha^2}{b\cdot c}\right), -\left(\frac{-\alpha}{ac} - \frac{\alpha}{ac}\right), -\frac{\alpha^2}{ab} - \frac{1}{ab}\right]$$

$$\vec{u}(\alpha) = \left(1/bc\left(1-\alpha^2\right),\ 2\alpha/ac,\ -1/ab\left(\alpha^2+1\right)\right)$$

• Donde la recta con el vector dirección $\vec{u}(\alpha)$ y que pasa por P_0 en su forma paramétrica es

$$l_\alpha : P_0 + s\,\vec{u}(\alpha)$$

y de (2) hallamos a $\vec{u}(\beta)$

$\therefore \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{y}{b}\right) \Rightarrow \beta\frac{x}{a} + \beta\frac{z}{c} + \frac{y}{b} = 1$

$\Rightarrow \left(\beta/a,\ 1/b,\ \beta/c\right)\cdot(x, y, z) = 1$

$\Rightarrow \vec{n}_3 = \left(\beta/a,\ 1/b,\ \beta/c\right)$

y $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \beta\left(1 + y/b\right) \Rightarrow \frac{x}{a} - \frac{\beta y}{b} - \frac{z}{c} = \beta$

$\Rightarrow \left(1/a,\ -\beta/b,\ -1/c\right)\cdot(x, y, z) = \beta$

$\Rightarrow \vec{n}_4 = \left(1/a,\ -\beta/b,\ -1/c\right)$

$\therefore \vec{u}(\beta) = \vec{n}_3 \times \vec{n}_4 = \left[\,1/bc\,(1-\beta^2),\ -2\beta/ac,\ 1/ab\,(1+\beta^2)\right]$, y como consecuencia la forma paramétrica de la recta por P_0 con $\vec{u}(\beta)$ como vector dirección está dada por l_β: $P_0 + \tilde{s}\,u(\beta)$

Por otro lado cualquier recta que P_0 está definida por l: $P_0 + t\vec{u}$, y dada la expresión del hiperboloide $\mathcal{H}(p) = p^tAp = 1$, cualquier recta que pertenezca a él, cumple que

$\mathcal{H}(p_0 + t\vec{u}) = t^2\vec{u}^tA\vec{u} + t(p_0^tA\vec{u} + \vec{u}^tAp_0) + p_0^tAp_0 = 1$

· Ahora al sustituir l_α en $\mathcal{H}(p_0 + t\vec{u})$ obtendremos las condiciones para α, analizando el coeficiente del segundo término de la ecuación.

$\therefore p_0^tA\vec{u}(\alpha) + u(\alpha)^tAp_0 = \frac{2x_0}{a^2}\frac{(1-\alpha^2)}{bc} + \frac{2y_0}{b^2}\cdot\frac{2\alpha}{ca} - \frac{2z_0}{c^2}\cdot\frac{\alpha^2+1}{ab}$

$$= \frac{2x_0}{a^2bc} - \frac{2x_0\alpha^2}{a^2bc} + \frac{4y_0\alpha}{b^2ca} - \frac{2z_0\alpha^2}{c^2ab} - \frac{2z_0}{c^2ab}$$

$$= \alpha^2\left(\frac{-2x_0}{a^2bc} - \frac{2z_0}{c^2ab}\right) + \frac{4y_0\alpha}{b^2ca} + \left(\frac{2x_0}{a^2bc} - \frac{2z_0}{c^2ab}\right) \quad (*)$$

∴ Con el discriminante de (*) encontramos que

$$\Delta = \left(\frac{4y_0}{b^2ca}\right)^2 - 4\left(\frac{-2x_0}{a^2bc} - \frac{2z_0}{c^2ab}\right)\left(\frac{2x_0}{a^2bc} - \frac{2z_0}{c^2ab}\right)$$

$$= \frac{16y_0^2}{b^4c^2a^2} + 4\left(\frac{4x_0^2}{a^4b^2c^2} - \frac{4z_0^2}{c^4a^2b^2}\right)$$

$$= 16\left(\frac{x_0^2}{a^4b^2c^2} + \frac{y_0^2}{b^4c^2a^2} - \frac{z_0^2}{c^4a^2b^2}\right)$$

$$= \frac{16}{a^2b^2c^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2}\right) = \frac{16}{a^2b^2c^2}$$

∴

$$\alpha_1 = \frac{-\frac{4y_0}{b^2ca} + \frac{4}{abc}}{-4\left(\frac{x_0}{a^2bc} + \frac{z_0}{c^2ab}\right)} \qquad \alpha_2 = \frac{-\frac{4y_0}{b^2ca} - \frac{4}{abc}}{-4\left(\frac{x_0}{a^2bc} + \frac{z_0}{ac^2b}\right)}$$

$$\alpha_1 = \frac{\frac{1}{abc}\left(\frac{-y_0}{b} + 1\right)}{\frac{1}{abc}\left(\frac{-x_0}{a} - \frac{z_0}{c}\right)} \qquad \alpha_2 = \frac{-y_0ac - abc}{-bcx_0 - abz_0}$$

$$\alpha_1 = \frac{-y_0ac + abc}{-bcx_0 - abz_0}$$

Para obtener el valor de β sustituimos $l\beta$ en $\mathcal{H}(p_0 + l\vec{a})$, y del coeficiente del segundo término de la ecuación, encontramos que

$$p_0^{t} A \vec{a}(\beta) + 4(\beta)^{t} A p_0 = \frac{2x_0(1-\beta^2)}{a^2 bc} + \frac{2y_0}{b^2}\cdot\frac{-2\beta}{ac} - \frac{2z_0}{c^2}\cdot\frac{(1+\beta^2)}{ab}$$

$$= \frac{2x_0}{a^2bc} - \frac{2x_0\beta^2}{bca^2} - \frac{4y_0\beta}{b^2ac} - \frac{2z_0}{c^2ab} - \frac{2z_0\beta^2}{c^2ab}$$

$$= -\beta^2\left(\frac{2x_0}{bca^2} + \frac{2z_0}{c^2ab}\right) - \frac{4y_0\beta}{b^2ac} + \left(\frac{2x_0}{a^2bc} - \frac{2z_0}{c^2ab}\right) \quad \#$$

• Donde el determinante de # es

$$\Delta = \left(\frac{-4y_0}{b^2ac}\right)^2 + 4\left(\frac{2x_0}{bca^2} + \frac{2z_0}{c^2ab}\right)\left(\frac{2x_0}{a^2bc} - \frac{2z_0}{c^2ab}\right)$$

$$= \frac{16}{a^2b^2c^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) = \frac{16}{a^2b^2c^2}$$

$$\beta_1 = \frac{\dfrac{-4y_0}{b^2ac} + \dfrac{4}{abc}}{-4\left(\dfrac{x_0}{bca^2} + \dfrac{z_0}{c^2ab}\right)}$$

$$= \frac{-y_0ac + abc}{-x_0bc - z_0ab}$$

$$\beta_2 = \frac{\dfrac{-4y_0}{b^2ac} - \dfrac{4}{abc}}{-4\left(\dfrac{x_0}{bca^2} + \dfrac{z_0}{c^2ab}\right)}$$

$$= \frac{-y_0ac - abc}{-x_0bc - z_0ab}$$

$$= \frac{y_0ac + abc}{x_0bc + z_0ab}$$