Geometría Analítica II — Trabajo 21

Juan Salvador Garza Ledesma — 11 - abril - 2005

10

Dibuje y de la ecuación de las ~~cuádricas centrales~~.

Las ecuaciones canónicas de las ~~cuádricas~~ centrales tienen la forma general:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R \quad \ldots (\mathrm{I})$$

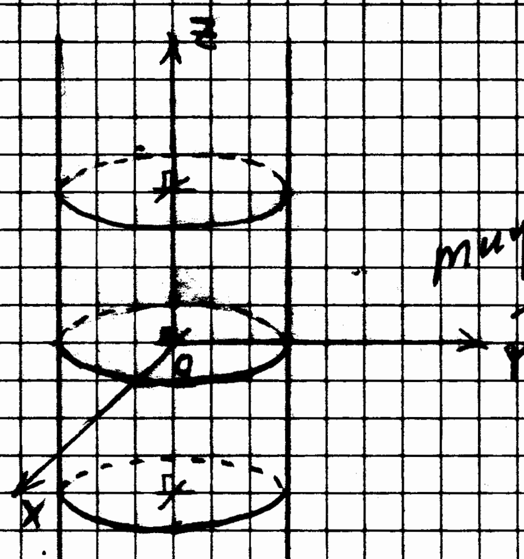
Con $A, B, C, R \neq 0$, si $A = B = C = 0$ tenemos en (I) una barbaridad salvo que $R = 0$, si dos de los coeficientes A, B ó C son cero tendremos una ecuación de la forma:

$$Mx^2 = R$$

La cual si $R = 0$ es simplemente $Mx^2 = 0 \iff x = 0$ lo cual representa al plano que forman los dos ejes cuyas variables no intervienen en la ecuación.

Si $R \neq 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{R}{M}}$ lo cual puede representar ó dos planos paralelos ó ningún lugar geométrico real si $R/M < 0$. En estos casos (en que dos de los coeficientes A, B ó C son cero) tenemos estas opciones, en el caso de que sólo uno de los coeficientes A, B ó C sea cero, por ejemplo $C = 0$ sabemos que:

$Ax^2 + By^2 = R$ representa una cónica o una de sus formas "degeneradas" en el plano XY y un cilindro en $O\text{-}XYZ$ el cual tiene una infinidad de puntos de simetría (todo su eje):



Muy buen trabajo.

Si queremos tener entonces un centro de simetría nos debe interesar que ninguno de los números A, B, ó C sea cero, ya hemos visto en trabajos anteriores ecuaciones de la forma

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$ hemos visto que representan conos rectos.

Así que las figuras nuevas no conocidas hasta ahora son aquellas representadas por (I) y en las cuales ninguno de los coeficientes es igual a cero, entonces por una operación algebraica la ecuación puede ser vista en la forma:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \ldots (II)$$

La cual nos es familiar en $\mathbb{R}^2$. Vemos que en este tipo de ecuaciones se cumple si las vemos como una función:

$$Q(x, y, z) = \pm \frac{x^2}{a} \pm \frac{y^2}{b} \pm \frac{z^2}{c}$$

que $Q(x, y, z) = Q(-x, -y, -z)$, es decir el lugar geométrico tiene como centro de simetría al origen.

Existen 3 posibles figuras esencialmente distintas o tres tipos que tienen por ecuación a (II). Y corresponden a cada uno de los 3 subcasos de (II):

a) - Cuando 2 coeficientes son negativos
b) - Cuando 1 coeficiente es negativo
c) - Cuando ningún coeficiente es negativo

a) Si dos coeficientes son negativos, podemos suponer que lo son los de x e y:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \ldots (H_2)$$

Vemos que si hacemos $x = 0$ para obtener $H_2 \cap YZ$ obtenemos la ecuación:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ que es una hipérbola

También haciendo $y=0$ para obtener $H_2 \cap XZ$ se tiene:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$ Otra hipérbola

Sin embargo si se hace $z=0$ se tiene:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$ lo cual no es posible para $x, y \in \mathbb{R}$, así que no tenemos lugar geométrico real para $H_2 \cap XY$.

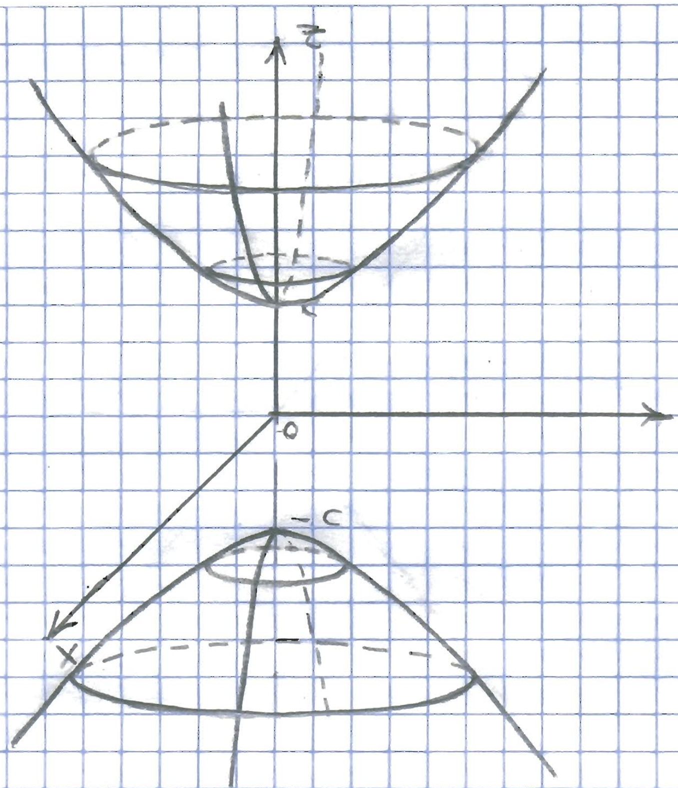
Pero si nos interesa obtener la intersección de H_2 con un plano paralelo al XY, digamos con $z=k$ tenemos:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2} \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1$$

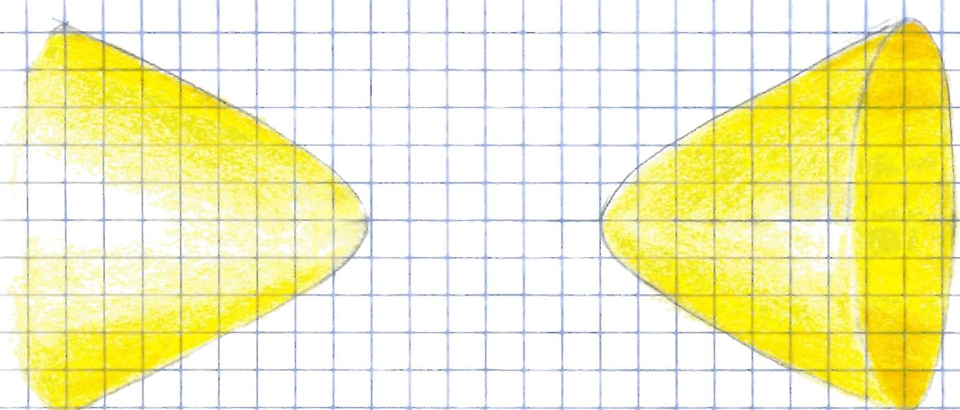
lo cual como sabemos representará una elipse $\iff \frac{k^2}{c^2} > 1 \iff |k| > c$ o bien un par de puntos si $k = \pm c \Rightarrow \frac{k^2}{c^2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ lo cual sólo se cumple si $x = y = 0$ entonces tendríamos los dos puntos correspondientes: $(0, 0, c)$ y $(0, 0, -c)$.

Con lo anterior vemos que H_2 es un 'híbrido' de hipérbolas y elipses el cual es llamado 'Hiperboloide de dos hojas' y con la información anterior se puede tener ya idea de cómo luce, su sesión de modelaje con radiografías:

Hiperboloide de dos hojas

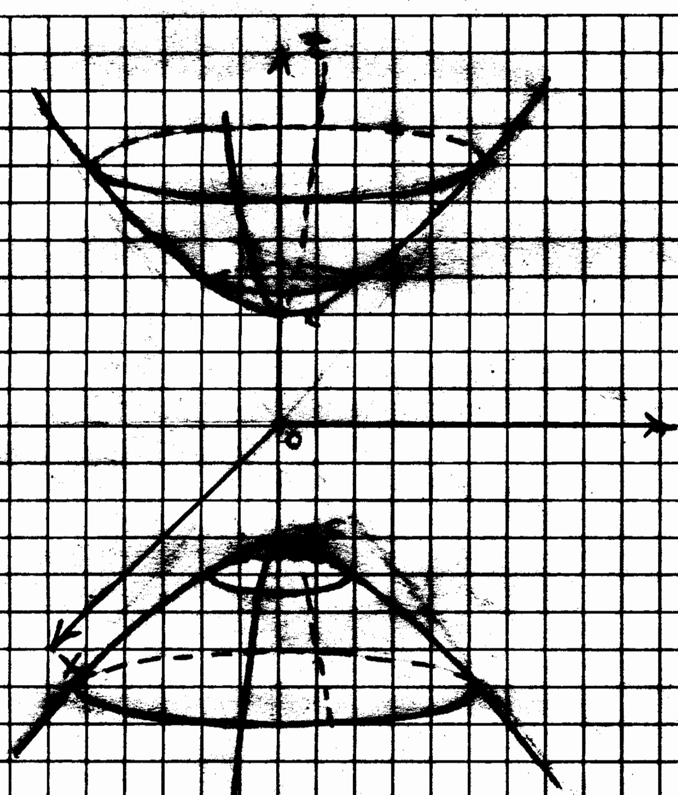


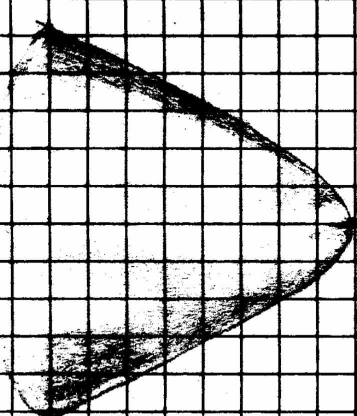
$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

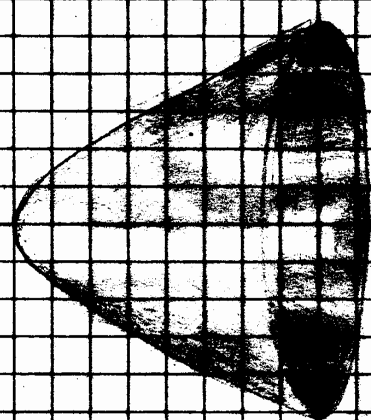


Hiperboloide de dos hojas

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

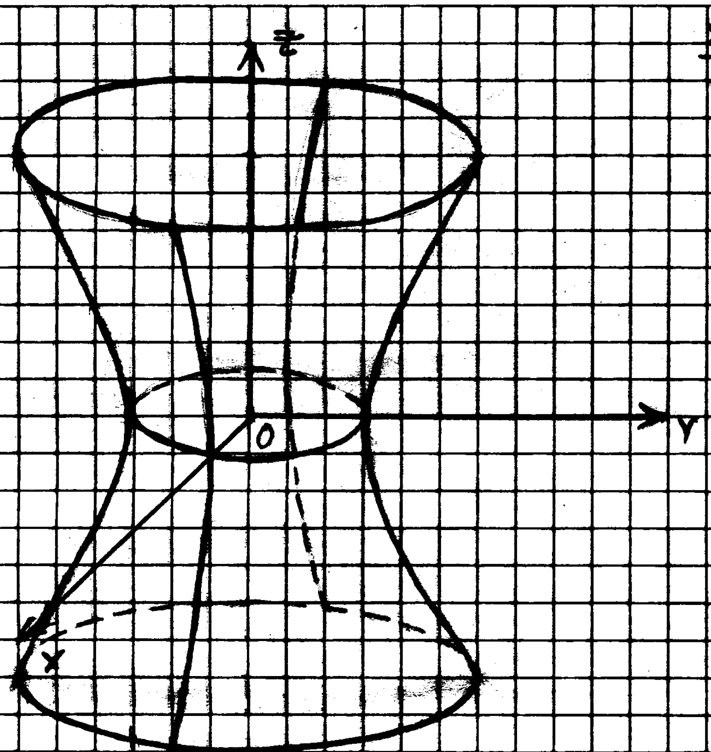


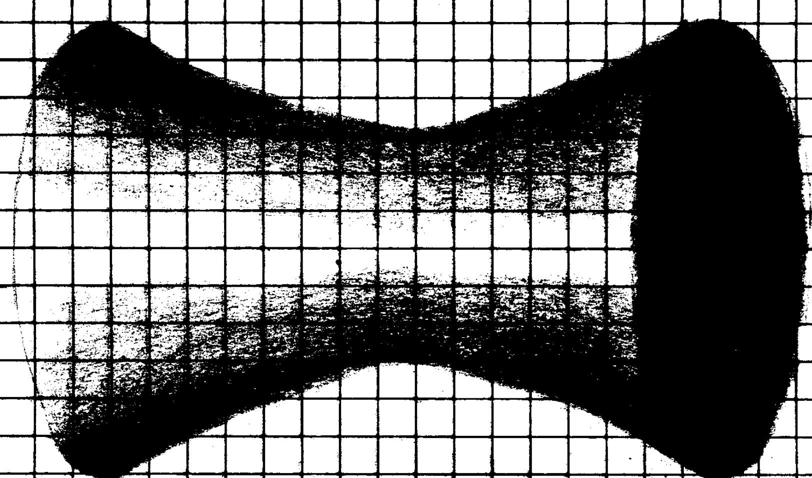




Hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$





Finalmente si todos los signos de (II) son positivos obtenemos:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \ldots (E)$$

Vemos fácilmente que la intersección de E con cualquier plano coordenado es una elipse, aquí no intervienen las hipérbolas a diferencia de las dos anteriores. Antes de ver la figura veamos que el caso particular en que $a=b=c$ E representa la esfera de radio a:

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

Con centro en el origen. Así que es previsible que en general E sea una superficie que no se extiende indefinidamente como las anteriores.

Las intersecciones de E con los ejes coordenados son $(\pm a,0,0)$ con X, $(0,\pm b,0)$ con Y y $(0,0,\pm c)$ con Z, esto es inmediato de hacer por ejemplo $z=y=0$ en (E):

$$\frac{x^2}{a^2}=1 \implies x=\sqrt{a^2}=\pm a$$

Veamos que si intersecamos a E con un plano paralelo a algún plano coordenado que diste del origen más que la intersección de E con el eje correspondiente la intersección es vacía. Por ejemplo si hacemos $z=c+\varepsilon$; $\varepsilon>0$ tenemos:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(c+\varepsilon)^2}{c^2}=1 \iff \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{(c+\varepsilon)^2}{c^2}$$

y como $c+\varepsilon<c \implies \frac{(c+\varepsilon)^2}{c^2}>1 \implies \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-k$

Para algún $k\in\mathbb{R}$ lo cual no es posible en $\mathbb{R}$ pues $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ siempre son positivos.

Así que (E) debe estar dentro de la caja que limitan los planos $x=\pm a$, $y=\pm b$, $z=\pm c$, y es una especie de sandía en general aunque puede llegar a ser una esfera.

a melon thing

Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$