Facultad de Ciencias, U.N.A.M.

Geometría Analítica II

Trabajo 1

Juan Salvador Garza Ledesma

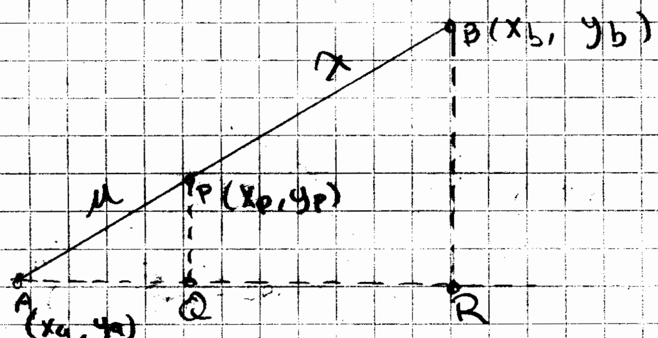
9 / Feb / 2005

Prof. { Pablo Barrera
Guilmer González }

1: Sean $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ dos puntos cualesquiera de $\mathbb{R}^2$, considérese el segmento $\overline{AB}$.

Sean $P \in \overline{AB}$, $d(A,P) = \mu$ y $d(P,B) = \lambda$, si P tiene coordenadas (x_p, y_p) entonces:

$$x_p = \frac{\lambda x_a + \mu x_b}{\mu + \lambda} \quad ; \quad y_p = \frac{\lambda y_a + \mu y_b}{\mu + \lambda}.$$



Tracemos dos líneas paralelas al eje Y que pasen por P y B respectivamente, llamémoslas j y k, pasando por A tracemos una paralela al eje X, llamémosle l, sean $Q = j \cap l$, $R = k \cap l$.

Es claro que $x_a + |\overline{AQ}| = x_p$, ahora observemos que $\measuredangle PAQ = \measuredangle BAR$ (ángulo común) y $\measuredangle AQP = \measuredangle ARB = 90°$ por construcción $\Rightarrow \Delta PAQ \sim \Delta BAR \Rightarrow \frac{|\overline{AQ}|}{\mu} = \frac{|\overline{AR}|}{\mu + \lambda} \Rightarrow$

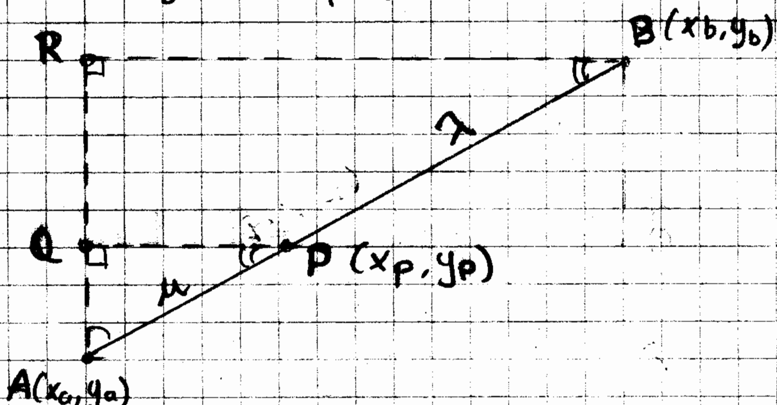
$|\overline{AQ}| = \frac{\mu |\overline{AR}|}{\mu + \lambda}$, pero $|\overline{AR}| = x_b - x_a \Rightarrow |\overline{AQ}| = \frac{\mu(x_b - x_a)}{\mu + \lambda} =$

$= \frac{\mu x_b - \mu x_a}{\mu + \lambda} \therefore x_p = x_a + \frac{\mu x_b - \mu x_a}{\mu + \lambda} = \frac{\mu x_a - \mu x_a + \lambda x_a + \mu x_b}{\mu + \lambda}$

$= \frac{\lambda x_a + \mu x_b}{\mu + \lambda}$, para obtener el resultado de la ordenada se "repite" lo anterior de manera análoga, pero de todos modos está en la otra hoja.

Comprobamos rápidamente la expresión para la ordenada y_p.

Tracemos paralelas a los ejes coordenados para formar los triángulos rectángulos ΔBAR y ΔBPQ que resultan semejantes por tener sus 3 ángulos respectivamente iguales, tomemos entonces razones entre segmentos proporcionales:



$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AR}} = \frac{\mu}{\mu+\lambda} \Longrightarrow \overline{AQ} = \frac{\mu\,\overline{AR}}{\mu+\lambda}, \text{ pero } \overline{AR} = y_b - y_a \Longrightarrow$$

$$\overline{AQ} = \frac{\mu y_b - \mu y_a}{\mu+\lambda}; \text{ finalmente, como } y_p = y_a + \overline{AQ} \Longrightarrow$$

$$y_p = y_a + \frac{\mu y_b - \mu y_a}{\mu+\lambda} = \frac{\lambda y_a + \mu y_b}{\mu+\lambda}$$

como se quería probar.

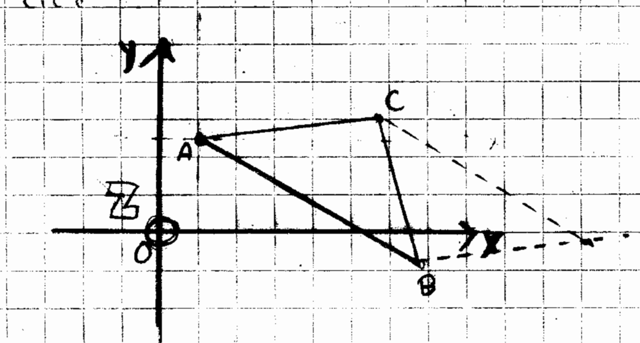
② Demostrar de dos formas distintas que el área de un triángulo cuyos vértices son los puntos:

$A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, $C(x_c, y_c)$ está dada por:

$$\text{Área}\,[ABC] = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}$$

<u>Una forma</u>: (Esta es un poco 'tramposa')

Pensemos en A, B, C como vectores de $\mathbb{R}^3$.



Consideremos los vectores $P = C - A$ y $Q = B - A$, luego usamos el producto vectorial $Q \times P$ para obtener el área del paralelogramo cuyos vértices son A, B, C y un punto D obtenido de la intersección de dos paralelas a $\overline{AB}$ y a $\overline{AC}$ que pasan por C y B respectivamente, luego bastará dividir entre 2 este resultado para obtener Área [ABC].

$$P = C - A = (x_c, y_c, 0) - (x_a, y_a, 0) = (x_c - x_a, y_c - y_a, 0)$$
$$Q = B - A = (x_b - x_a, y_b - y_a, 0)$$

$$Q \times P = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_b - x_a & y_b - y_a & 0 \\ x_c - x_a & y_c - y_a & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, (x_b - x_a)(y_c - y_a) - (x_c - x_a)(y_b - y_a))$$

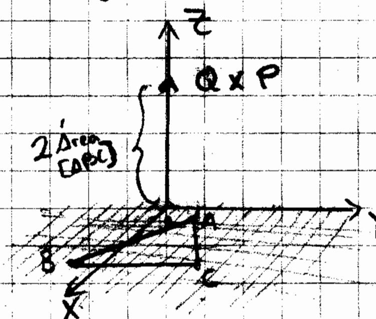
$$\Rightarrow \|Q \times P\| = 2\,\text{Área}\,[ABC] = \sqrt{[(x_b - x_a)(y_c - y_a) - (x_c - x_a)(y_b - y_a)]^{\cancel{2}}} =$$

$$= x_b y_c - y_a x_b - x_a y_c + \cancel{x_a y_a} - x_c y_b + y_a x_c + x_a y_b - \cancel{x_a y_a} =$$

$$= x_a(y_b - y_c) - y_a(x_b - x_a) + x_b y_c - x_c y_b =$$

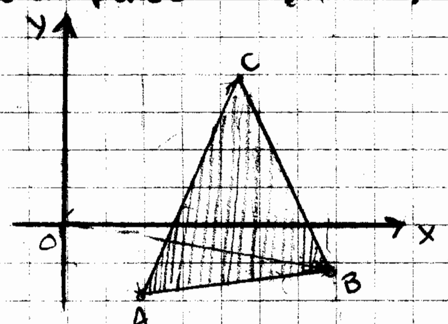
$$= \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} \quad \therefore \quad \text{Área } [ABC] = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{matrix} \right\|$$

Aunque de esta manera nos salimos del plano con un vector cuya magnitud era el doble del área buscada.



Otra forma:

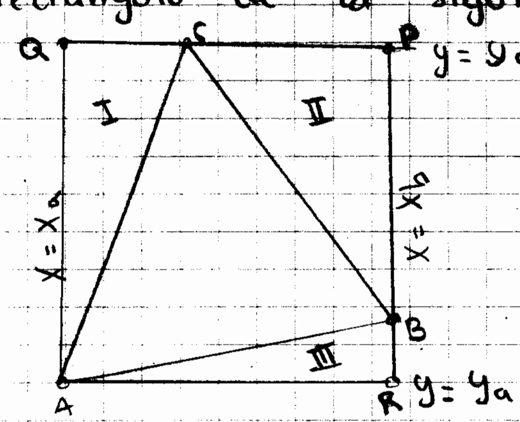
Ahora pensemos en A, B, C como puntos de $\mathbb{R}^2$



Supongamos que las coordenadas de los puntos dados cumplen con que

$x_a < x_c < x_b$ y $y_a < y_b < y_c$ o en general que no haya una igual a la otra, luego podríamos renombrarlas convenientemente.

Entonces la figura es suceptible a inscribirse en un rectángulo de la siguiente forma:



Luego tenemos que el área del rectángulo ARPQ es:

$(x_b - x_a)(y_c - y_a)$ y ahora para obtener el área de ΔABC basta restar las áreas I, II y III de 3 triángulos que tienen la ventaja de ser rectángulos, estas serán:

$[I] = \frac{1}{2}(y_c - y_a)(x_c - x_a)$

$[II] = \frac{1}{2}(y_c - y_b)(x_b - x_c)$

$[III] = \frac{1}{2}(x_b - x_a)(y_b - y_a)$

Si desarrollamos lo anterior se obtiene:

$$[I]+[II]+[III] = \frac{1}{2}\left[(y_c-y_a)(x_c-x_a)+(y_c-y_b)(x_b-x_c)+(x_b-x_a)(y_b-y_a)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(y_c x_b - y_c x_a + x_c y_b - x_c y_a - x_a y_b - x_b y_a) + x_a y_a$$

Si restamos ésto último al área del rectángulo grande en el que inscribimos al triángulo se obtiene:

$$\text{Área }[ABC] = (x_b-x_a)(y_c-y_a) - \frac{1}{2}(y_c x_b - y_c x_a + x_c y_b - x_c y_a - x_a y_b - x_b y_a)$$

$- x_a y_a$, desarrollando y reagrupando:

$$\text{Área }[ABC] = \frac{1}{2}(y_c x_b - y_c x_a + x_c y_a - x_c y_b + x_a y_b - x_b y_a)$$

$$= \frac{1}{2}(x_c(y_a - y_b) - y_c(x_a - x_b) + x_a y_b - x_b y_a) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_c & y_c & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix}$$

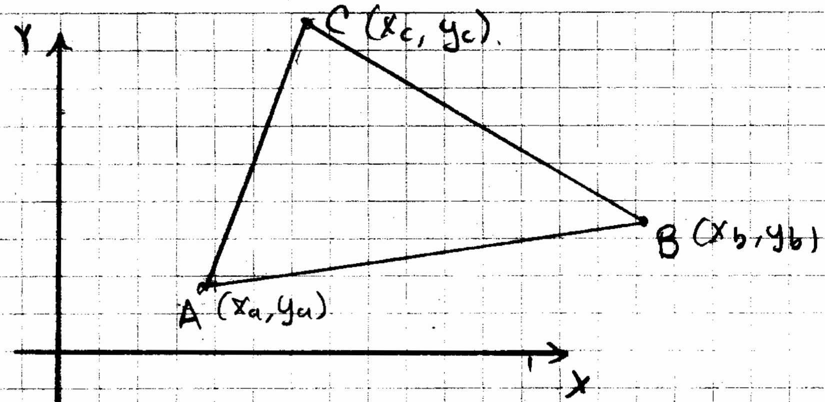
, bueno solamente necesitamos renombrar los puntos para obtener la fórmula idénticamente, lo cual no es problema, pues nos interesa conocer solo la magnitud del área del triángulo.

Otra forma:

Ahora pensemos en las rectas que forman $\triangle ABC$, recordemos que la distancia de un punto a una recta puede calcularse mediante la siguiente relación:

$$d(P,\ell) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{donde } \ell = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid Ax+By+C=0\}$$
$$P = (x_1, y_1).$$

Usaremos la fórmula de área de un triángulo más famosa: Área = base × altura / 2, pensemos en el triángulo de la siguiente figura:



Tomemos de base: $b = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2}$

La ecuación de la recta que pasa por A, B puede ser expresada como:

$$y - y_a = \frac{y_b-y_a}{x_b-x_a}(x-x_a) \iff$$

$$(y-y_a)(x_b-x_a) - (y_b-y_a)(x-x_a) = 0$$

$$\iff (y_a-y_b)x + (x_b-x_a)y - x_b y_a + x_a y_b = 0 \ldots \ell_1$$

Ahora calculemos $d(C, \ell_1)$; o sea h (altura).

$$h = \frac{|(y_a-y_b)x_c + (x_b-x_a)y_c - x_b y_a + x_a y_b|}{\sqrt{(y_a-y_b)^2+(x_b-x_a)^2}}$$

$$\therefore \text{Área } [ABC] = \frac{1}{2}\cancel{\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2}} \; \frac{|(y_a-y_b)x_c + (x_b-x_a)y_c - x_b y_a + x_a y_b|}{\cancel{\sqrt{(y_a-y_b)^2+(x_b-x_a)^2}}}$$

como $|y_a - y_b| = |y_b - y_a| \Rightarrow (y_b-y_a)^2 = (y_a-y_b)^2 \Rightarrow$

$$\text{Área } [ABC] = \frac{1}{2}|(y_a-y_b)x_c - y_c(x_a-x_b) - x_b y_a + x_a y_b| =$$

$$\left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_c & y_c & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix} \right|$$

(Nuevamente salieron rebautizados los x, y, pero no altera el resultado).

3 Considere la siguiente terna de líneas rectas:

① -- $\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0$
② -- $\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0$
③ -- $\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 = 0$

determine una condición en términos de los parámetros α, β, γ para que las tres líneas concurran en un mismo punto.

Consideremos el sistema de ecuaciones que formen las rectas ② y ③, sabemos que la solución la podemos expresar de la siguiente forma:

$$② \cap ③ = \left(\frac{\begin{vmatrix} -\gamma_2 & \beta_2 \\ -\gamma_3 & \beta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} \alpha_2 & -\gamma_2 \\ \alpha_3 & -\gamma_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}} \right) \text{ por la regla de Cramer}$$

Obviamente esto implica que ② y ③ no sean paralelas, ahora queremos que el punto $P = ② \cap ③$ pertenezca también a la primera recta, es decir que satisfaga su ecuación:

$$\alpha_1 \frac{\begin{vmatrix} -\gamma_2 & \beta_2 \\ -\gamma_3 & \beta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}} + \beta_1 \frac{\begin{vmatrix} \alpha_2 & -\gamma_2 \\ \alpha_3 & -\gamma_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}} + \gamma_1 = 0 \iff$$

$$\frac{1}{\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}} \left[\alpha_1 (\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2) + \beta_1 (\alpha_3 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_3) \right] + \gamma_1 = 0 \iff$$

$$\alpha_1 (\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2) + \beta_1 (\alpha_3 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_3) + \gamma_1 (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) = 0$$

$$\iff \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0,$$ luego, las tres rectas son concurrentes cuando este determinante se anule.