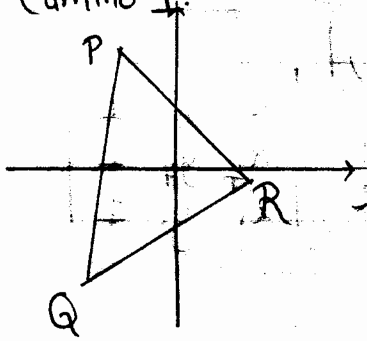
Geometría Analítica II
Trabajo 1

Mendoza Luna Luis Guillermo.

1. Dados los puntos $P(x_p, y_p)$, $Q(x_q, y_q)$ y $R(x_r, y_r)$ en el plano $\mathbb{R}^2$, demostrar por dos caminos distintos que

$$\text{área}\left(\Delta(P,Q,R)\right) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \\ x_r & y_r & 1 \end{vmatrix}$$

Camino 1:



Si b y h denotan la base y la altura de un triángulo PQR, $\text{área}(\Delta(P,Q,R)) = \frac{1}{2}bh$.

Elegiremos $b = d(P,Q)$, de modo que $b = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$. Sea l la recta que pasa por P y Q; entonces, $d(R, l)$ es una altura del triángulo (pues para calcular la distancia de un punto a una recta se traza una perpendicular a l que pase por R, y se mide la distancia entre R y el pie de la perpendicular). Así, $h = d(R, l)$

Según la forma dos puntos de la ecuación de la recta,

$$l: \quad y - y_q = \frac{y_p - y_q}{x_p - x_q}(x - x_q)$$ lo cual puede escribirse como

$$(y - y_q)(x_p - x_q) = (y_p - y_q)(x - x_q)$$

$$\Rightarrow yx_p - yx_q - x_p y_q + x_q y_q = xy_p - x_q y_p - xy_q + x_q y_q$$

$$\Rightarrow x(y_q - y_p) + y(x_p - x_q) + (x_q y_p - y_q x_p) = 0$$

$$\therefore \quad h = \frac{|x_r(y_q - y_p) + y_r(x_p - x_q) + (x_q y_p - y_q x_p)|}{\sqrt{(y_q - y_p)^2 + (x_p - x_q)^2}}$$

Mendoza Luna Luis Guillermo.

$$\therefore \text{área}(\Delta(P,Q,R)) = \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(x_p-x_q)^2+(y_p-y_q)^2}\,|x_r(y_q-y_p)+y_r(x_p-x_q)+(x_q y_p-y_q x_p)|}{\sqrt{(x_p-x_q)^2+(y_p-y_q)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left| x_r y_q - x_r y_p + x_p y_r - x_q y_r + x_q y_p - y_q x_p \right|$$

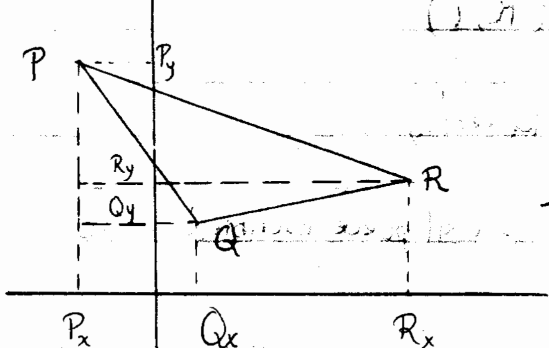
$$= \frac{1}{2}\left| -(x_q y_r - x_r y_q) + (x_p y_r - x_r y_p) - (x_p y_q - x_q y_p) \right|$$

$$= \frac{1}{2}\left| (x_q y_r - x_r y_q) - (x_p y_r - x_r y_p) + (x_p y_q - x_q y_p) \right|$$

$$= \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} x_q & y_q \\ x_r & y_r \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_p & y_p \\ x_r & y_r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_p & y_p \\ x_q & y_q \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}\left| \begin{matrix} x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \\ x_r & y_r & 1 \end{matrix} \right|$$

(tomando el valor absoluto del determinante).

Camino 2:



Sean P_x, Q_x y R_x las proyecciones de P, Q y R sobre el eje x, respectivamente, y P_y, Q_y y R_y las proyecciones sobre el eje y.

Tenemos que área$(\Delta(P,Q,R))$ = área$(\square(P,P_x,R_x,R))$ − área(P,Q,Q_x,P_x) − área$(\square(Q_x,R_x,R,Q))$

Por la fórmula del área del trapecio,

$$\text{área}(\square(P,P_x,R_x,R)) = \frac{1}{2}(\overline{P_xR_x})(\overline{PP_x}+\overline{RR_x}) = \frac{1}{2}(x_r-x_p)(y_p+y_r)$$

$$\text{área}(\square(P,Q,Q_x,P_x)) = \frac{1}{2}(x_q-x_p)(y_p+y_q)$$

$$\text{área}(\square(Q,R,Q_x,R_x)) = \frac{1}{2}(x_r-x_q)(y_q+y_r)$$

Mendoza Luna Luis Guillermo.

b) área$(\Delta(P,Q,R))$ =

$$\frac{1}{2}\left[(x_r-x_p)(y_p+y_r)-(x_q-x_p)(y_p+y_q)-(x_r-x_q)(y_q+y_r)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[x_r y_p+\cancel{x_r y_r}-\cancel{x_p y_p}-x_p y_r-(x_q y_p+\cancel{x_q y_q}-\cancel{x_p y_p}-x_p y_q)-(x_r y_q+\cancel{x_r y_r}-\cancel{x_q y_q}-x_q y_r)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x_p y_q-x_q y_p)+(-x_p y_r+x_r y_p)+(x_q y_r-x_r y_q)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}x_p & y_p\\ x_q & y_q\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x_p & y_p\\ x_r & y_r\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_q & y_q\\ x_r & y_r\end{vmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_p & y_p & 1\\ x_q & y_q & 1\\ x_r & y_r & 1\end{vmatrix}$$

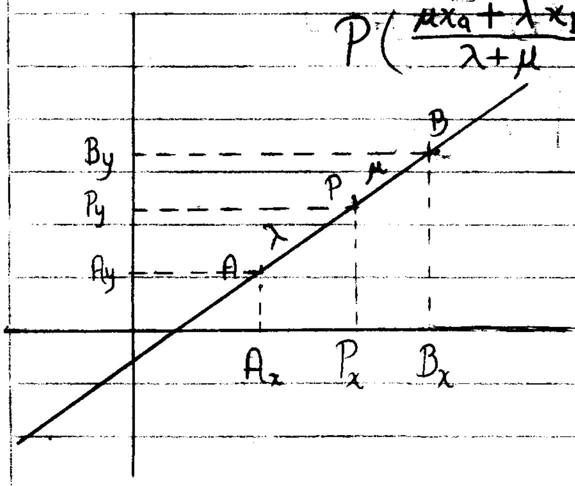
Mendoza Luna Luis Guillermo.

2. Considere los puntos $A(x_a, y_a)$ y $B(x_b, y_b)$ en el plano. Sea P un punto en el segmento $\overline{AB}$ tal que

$$r = \frac{AP}{PB} = \frac{\lambda}{\mu}$$

Demuestre que las coordenadas de $P(x, y)$ se pueden escribir como

$$P\left(\frac{\mu x_a + \lambda x_b}{\lambda+\mu}, \frac{\mu y_a + \lambda y_b}{\lambda+\mu}\right).$$



Sean A_x, P_x, B_x las proyecciones de los puntos A, P y B, respectivamente sobre el eje x. Los puntos con el subíndice x tienen coordenadas $(x_a, 0)$, $(x, 0)$, $(x_b, 0)$, respectivamente para A_x, P_x y B_x.

Las rectas proyectantes son paralelas; entonces, por el Teorema de Thales,

$$\frac{AP}{PB} = \frac{A_xP_x}{P_xB_x} = \frac{x - x_a}{x_b - x}. \quad \text{Pero} \quad \frac{AP}{PB} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{\mu} = \frac{x - x_a}{x_b - x} \Rightarrow \lambda(x_b - x) = \mu(x - x_a) \Rightarrow \lambda x_b - \lambda x = \mu x - \mu x_a$$

$$\Rightarrow \mu x_a + \lambda x_b = (\mu + \lambda)x \quad \Rightarrow x = \frac{\mu x_a + \lambda x_b}{\mu + \lambda}$$

De la misma manera, las coordenadas de A_y, P_y, B_y son $(0, y_a)$, $(0, y)$ y $(0, y_b)$, respectivamente y sus rectas proyectantes son paralelas; entonces, por el teorema de Tales,

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{AP}{PB} = \frac{A_yP_y}{P_yB_y}; \quad \text{como} \quad A_yP_y = y - y_a, \; P_yB_y = y_b - y$$

Mendoza Luna Luis Guillermo.

tenemos $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{y-y_a}{y_b-y} \Rightarrow \lambda y_b - \lambda y = \mu y - \mu y_a$

$$\Rightarrow \lambda y_b + \mu y_a = y(\lambda+\mu) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\mu y_a + \lambda y_b}{\mu+\lambda}$$

$\therefore$ $P(x,y)$ puede escribirse como $P\left(\frac{\mu x_a + \lambda x_b}{\lambda+\mu}, \frac{\mu y_a + \lambda y_b}{\mu+\lambda}\right)$.

3. Sean $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_3$ tres rectas en el plano determinadas por sus ecuaciones

$$\mathcal{L}_1 : \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0$$
$$\mathcal{L}_2 : \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0$$
$$\mathcal{L}_3 : \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 = 0$$

¿Cuál es la condición, en términos de los coeficientes, para que estas rectas sean concurrentes?

Si las rectas son concurrentes, existe un punto $P(x^*, y^*)$ que satisface las tres ecuaciones que definen las rectas. En particular,

$$\begin{matrix} \alpha_1 x^* + \beta_1 y^* + \gamma_1 = 0 \\ \alpha_2 x^* + \beta_2 y^* + \gamma_2 = 0 \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} \alpha_1 x^* + \beta_1 y^* = -\gamma_1 \\ \alpha_2 x^* + \beta_2 y^* = -\gamma_2 \end{matrix}$$

Como $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no pueden ser paralelas bajo la suposición de que existe un punto de concurrencia, $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$. Resolviendo x^* y y^* por el método de Cramer,

$$x^* = \frac{\begin{vmatrix} -\gamma_1 & \beta_1 \\ -\gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} \qquad y^* = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & -\gamma_1 \\ \alpha_2 & -\gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}$$

Sustituyendo estas expresiones de x^* y y^* en la ecuación de $\mathcal{L}_3$,

Mendoza Luna Luis Guillermo.

$$\alpha_3 \begin{vmatrix} -\gamma_1 & \beta_1 \\ -\gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix} + \beta_3 \begin{vmatrix} \alpha_1 & -\gamma_1 \\ \alpha_2 & -\gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

que puede escribirse como

$$\alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} - \beta_3 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \gamma_3 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0;$$

como este es el desarrollo por menores con respecto a la tercera fila de un determinante de 3x3 podemos escribir:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$