Patricia Vélez Mellado

Geometría Analítica II

Considere la esfera de radio $R=2$, con centro en $P_0(2,3,1)$ y un punto $P_2(5,5,5)$ fuera de ella. Indique cómo trazar el plano polar, aquél que describe $S(P,P_2)=0$

La ecuación de la esfera es:

$$S:\ x^2+y^2+z^2-4x-6y-2z+10=0$$

Considerar $A_1(0,3,1)\in S$, luego la recta

$l_1: P(t)=A_1+t(\vec{A_1P_2})=(0,3,1)+t(5,2,4)$, debe de intersectar a S en $B_1\neq A_1$. Además existe $P_1\in l_1$, tal que $P_1\in S(P,P_2)$:

- Para encontrar B_1 se hace:

$$(5t)^2+(3+2t)^2+(1+4t)^2-4(5t)-6(3+2t)-2(1+4t)+10=$$

$$25t^2+9+12t+4t^2+1+8t+16t^2-20t-18-12t-2-8t+10=$$

$$45t^2-20t=0$$

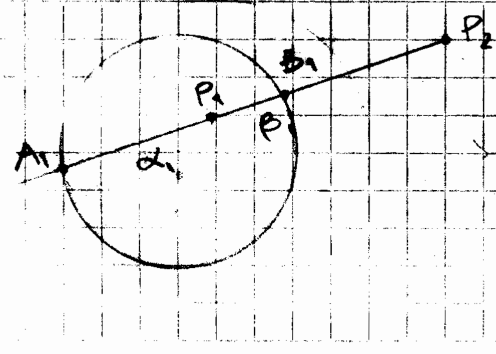
$$t_1=0 \qquad t_2=4/9$$

$$\Rightarrow P(t_2)=B_1=(0,3,1)+4/9(5,2,4)=\left(\frac{20}{9},\frac{35}{9},\frac{25}{9}\right)$$

Se busca $P_1\in l_1$, tal que se satisfaga la condición del plano polar i.e.

$$-\frac{P_1B_1}{B_1P_2}=\frac{P_1A_1}{A_1P_2},$$

en un corte de la esfera:



$$-\frac{\beta_1}{B_1P_2}=\frac{\alpha_1}{A_1P_2}$$

$\Rightarrow$ en coordenadas baricéntricas

$$P_1=\frac{\beta_1A_1+\alpha_1B_1}{\alpha_1+\beta_1}$$

Pero, se sustituye sigue:

$$|B_1P_2| = \sqrt{\frac{625}{81} + \frac{100}{81} + \frac{400}{81}} = \frac{\sqrt{1125}}{9} = \frac{\sqrt{125}}{3}$$

$$|A_1P_2| = \sqrt{25 + 4 + 16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\beta_1}{\frac{\sqrt{125}}{3}} = \frac{\alpha_1}{3\sqrt{5}} \iff$$

$$3\sqrt{5}\,\beta_1 = \frac{\sqrt{125}}{3}\,\alpha_1$$

$$9\sqrt{5}\,\beta_1 = 5\sqrt{5}\,\alpha_1$$

$$\Rightarrow \quad \beta_1 = 5\sqrt{5} \quad y \quad \alpha_1 = 9\sqrt{5}$$

Por lo que

$$P_1 = \frac{5\sqrt{5}\,(0,3,1) + \frac{\cancel{9}\sqrt{5}}{\cancel{9}}\,(20,35,25)}{14\sqrt{5}}$$

$$P_1 = \frac{1}{14\sqrt{5}}\left(20\sqrt{5},\ 50\sqrt{5},\ 30\sqrt{5}\right)$$

$$P_1 = \left(\frac{20}{14},\ \frac{50}{14},\ \frac{30}{14}\right)$$

$\leadsto P_1 \in$ Plano polar

Por otro lado, tomamos $A_2(2,1,1) \in S$, entonces la recta que pasa por P_2 y A_2 es:

$$l_2 : P(r) = A_2 + r\,(\overrightarrow{A_2P_2}) = (2,1,1) + r\,(3,4,4);$$

l_2 debe de intersectar a S en $B_2 \neq A_2$. Además existe $P_1' \in l_2$, tal que $P_1' \in l_2$.

• Haciendo:

$$(2+3r)^2 + (1+4r)^2 + (1+4r)^2 - 4(2+3r) - 6(1+4r)$$
$$-2(1+4r) + 10 = 4 + 12r + 9r^2 + 1 + 8r + 16r^2 + 1 + 8r$$
$$+16r^2 - 8 - 12r - 6 - 24r - 2 - 8r + 10 =$$
$$41r^2 - 16r = 0$$

$$r_1 = 0 \qquad r_2 = 16/41$$

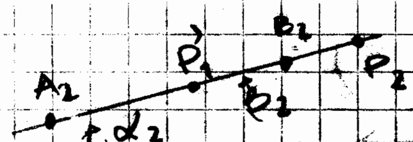
$$\Rightarrow P(16/41) = B_2 = (2,1,1) + \frac{16}{41}(3,4,4)$$
$$= \left(\frac{130}{41}, \frac{105}{41}, \frac{105}{41}\right)$$

Se busca $P_1' \in l_2$, tal que se cumpla la condición del plano polar:

$$-\frac{P_1'B_2}{B_2P_2} = \frac{P_1'A_2}{A_2P_2}$$

la recta se ve:

$$-\frac{\beta_2}{B_2P_2} = \frac{\alpha_2}{A_2P_2} \Rightarrow$$



$$P_1' = \frac{\beta_2 A_2 + \alpha_2 B_2}{\alpha_2 + \beta_2}$$

Pero, se tiene que:

$$|B_2P_2| = \sqrt{\frac{5625}{1681} + \left(\frac{10000}{1681}\right)2} = \frac{\sqrt{25625}}{41} = \frac{5\sqrt{1025}}{41}$$
$$= \frac{25\sqrt{41}}{41}$$

$|A_2P_2| = \sqrt{9+16+16} = \sqrt{41}$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\beta_2}{\frac{25\sqrt{41}}{41}} = \frac{\alpha_2}{\sqrt{41}} \iff$$

$$-(41\,\beta_2) = 25\,\alpha_2$$

haciendo $\beta_2 = 25$ y $\alpha_2 = 41$

Resulta que

$$P_1' = \frac{25(2,1,1) + \frac{41}{41}(130,105,105)}{25+41}$$

$$P_1' = \frac{1}{66}(180,130,130)$$

$\Rightarrow P_1' \in$ plano polar

• Para trazar el plano, se considera un corte transversal de la esfera y:

i) Localizar el pto P_1 dado y el pto P_1' obtenido también el procedimiento anterior.

ii) El plano se representa por la recta que une P_1 y P_1'