Jiménez Arteaga Bruno
Geometría Analítica

Considere la esfera de radio $R=2$ con centro en $P_0(2,3,1)$ y un punto $P_2(5,5,5)$ fuera de ella. Luego, trazar el plano polar, aquel que describe $S(p, p_2)=0$.

- Primero calculamos $S(P_2, P_2)$ y $S(P, P_2)$

$\therefore$ $S(P_2, P_2) = \|P_2 - P_0\|^2 - r^2 = \|(5,5,5)-(2,3,1)\|^2 - r^2$

$= \|(3, 2, 4)\|^2 = 3^2 + 2^2 + 4^2 - 2^2 = 25$

y $S(P, P_2) = (P - P_0)\cdot(P_2 - P_0) - r^2$

$= (x-2, y-3, z-1)\cdot(3,2,4) - 2^2$

$= 3x - 6 + 2y - 6 + 4z - 4 - 4$

$= 3x + 2y + 4z - 20 = 0$

- Ya que tenemos la ecuación del plano polar y sabemos que $S(P_1, P_1) < 0$ podemos determinar un punto P_1 del lugar geométrico

Sea $P_1 = (2, 3, 2)$, por lo tanto, tenemos que:

$S_{11} = \|C - P_0\|^2 - r^2 = \|(2,3,2) - (2,3,1)\|^2 - r^2$

$= \|(0, 0, 1)\|^2 - r^2 = 1 - 4 = -3$

- Ahora obtenemos la razón en la que los puntos A y B dividen al segmento P_1P_2 donde A y B son las intersecciones de la recta con la esfera

$\therefore$ Sea $a = P_1 + t_1(P_2 - P_1)$

$b = P_1 + t_2(P_2 - P_1)$

donde t_1 y t_2 son soluciones de $(S_{11} + S_{22})t^2 + 2t(S_{12}) + S_{11} = 0$

Entonces tenemos que

$\overrightarrow{P_1A} = a - P_1$

$= (P_1 + t_1(P_2 - P_1)) - P_1$

$= t_1(P_2 - P_1)$

$\overrightarrow{AP_2} = P_2 - a$

$= P_2 - P_1 - t_1(P_2 - P_1)$

$= (1 - t_1)(P_2 - P_1)$

$\therefore \dfrac{\overrightarrow{P_1A}}{AP_2} = \dfrac{t_1(P_2 - P_1)}{(1 - t_1)(P_2 - P_1)} = \dfrac{t_1}{1 - t_1}$ (#)

De manera análoga obtenemos que $\frac{P_1 B}{B P_2} = \frac{t_2}{1-t_2}$ (**)

Como sabemos que $t_1 = \frac{s_{11} + \sqrt{-s_{11}s_{22}}}{s_{11}+s_{22}}$ y

$t_2 = \frac{s_{11} - \sqrt{-s_{11}s_{22}}}{s_{11}+s_{22}}$, podemos sustituir en

(*) y (**) y simplificando obtenemos que

$$\frac{P_1 A}{A P_2} = \sqrt{\frac{-s_{11}}{s_{22}}} \quad y \quad \frac{P_1 B}{B P_2} = \sqrt{\frac{s_{11}}{s_{22}}}$$

$$\therefore \frac{P_1 A}{A P_1} = \sqrt{\frac{-(-3)}{25}} = \frac{\sqrt{3}}{5} \quad y \quad \frac{P_1 B}{B P_2} = \sqrt{\frac{-(-3)}{25}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

- Así podemos obtener la razón a partir del punto y utilizando el Teorema de Ceva y Menelao, podemos trazar el plano polar, ya que del teorema de Ceva tenemos que en un triángulo cualquiera ABC si consideramos 3 cevianas que concurren cumplen que

$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$$, donde L, M y N son

los pies de las cevianas sobre AB, BC, CA respectivamente

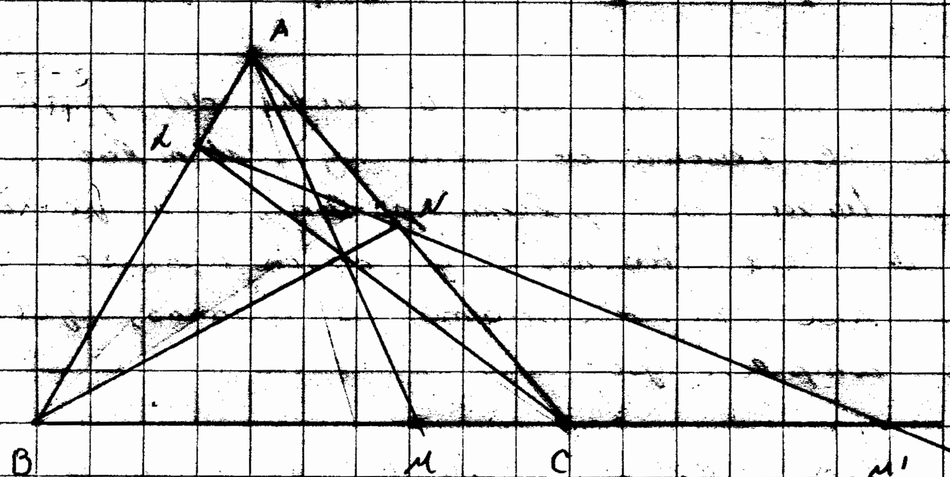
I. dice: Teorema de Menelao: si los puntos L, M', N colineales, sobre AB, BC y CA respectivamente, cumplen que

$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM'}{M'C} \cdot \frac{CN}{NA} = -1$$

$$\therefore \ (-1) \cdot \frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM'}{M'C} \cdot \frac{CN}{NA} = \frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA}$$

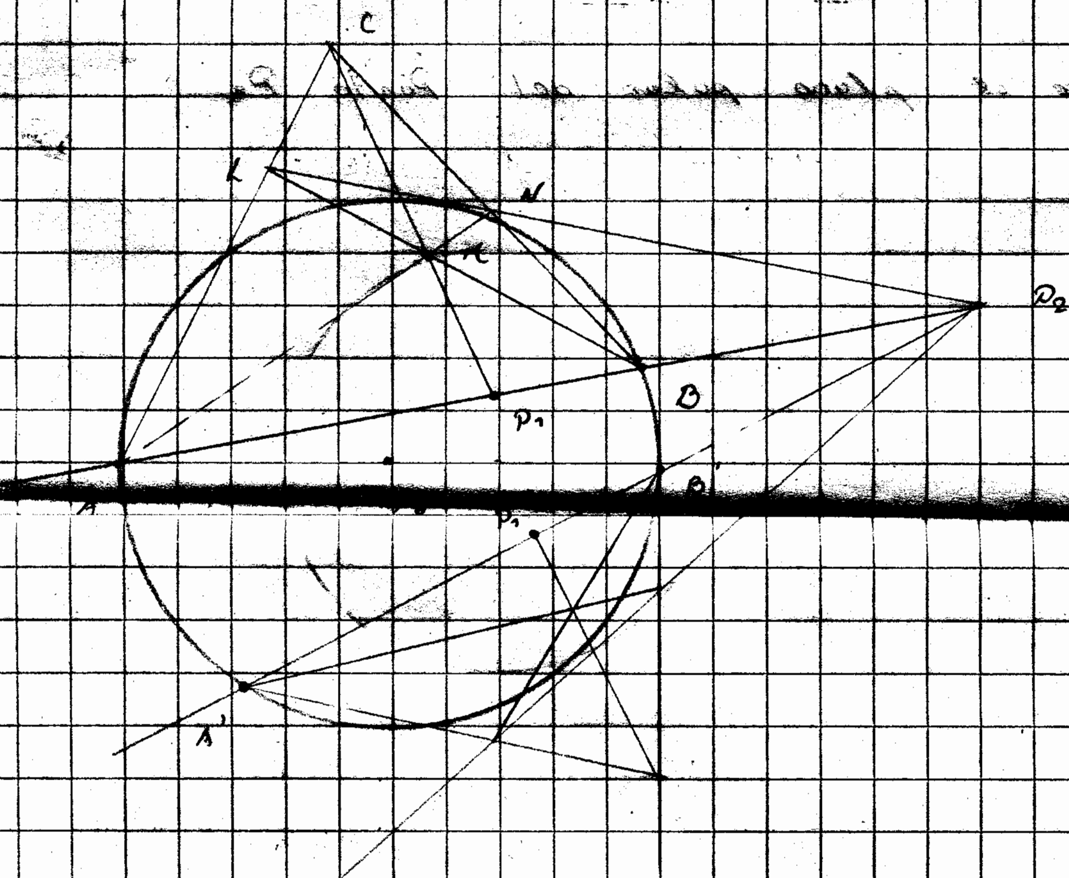
$$\frac{BM'}{M'C} = -\frac{BM}{MC}$$

que se puede interpretar geométricamente de la siguiente manera



Lo que quiere decir que dado M' o M podemos encontrar a M o a M'

Donde el [illegible] el [illegible] y [illegible] el punto P_2 podemos determinar P_1, consideramos los puntos A y B como los vértices de un [illegible]



Triángulo y P_2 el punto que divide al segmento AB en una razón. Construimos un triángulo ABC y trazamos una recta desde P_2 que corte a CA y CB para determinar L y N, respectivamente, luego unimos A con N y B con L, y será M donde se intersecan.
Finalmente unimos C con M y P_1 será el punto donde CM corte a AB.

[illegible]

[illegible]

AP_1 [illegible] AP_2 [illegible]

P_1B P_2B

[illegible] el plano polar del [illegible] P_0