Patricia A. Vélez Mellado 28/marzo/05
Geometría Analítica II

10

Considere la esfera con centro en el origen y radio $r = 1$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

y el pto. $P_0(1,1,1)$, encuentre la ecuación del cono que se forma al "tirar" líneas tangentes a la superficie de la esfera a partir de P_0.

⇝ La ecuación $\Pi: x_0 x + y_0 y + z_0 z = 1$, es la ecuación del plano al que pertenece la circunf. S, que se forma con los puntos de tangencia de la esfera y las rectas desde P_0. Como $P_0 = (1,1,1)$

$$\Pi: \; x + y + z = 1$$

⇝ Por otro lado, el eje del cono buscado es la recta $P(t) = t(1,1,1)$. Por lo que el centro de S, está dado por la intersección del plano Π con $P(t)$:

$$\xi := \Pi \cap P(t)$$

i.e. $\xi(t_c, t_c, t_c)$ con:

$$t_c + t_c + t_c = 1$$

$$t_c = 1/3$$

$\therefore \; \xi(1/3, 1/3, 1/3)$

⇝ Se busca conocer el radio de S

Considérese un pto. $P_1(x_1, y_1, z_1)$ tal que $P_1 \in S$, i.e., que $P_1 \in$ esfera y $P_1 \in \Pi$; se observa que

$$r = \| P_1 - \xi \|$$

Se sabe que P_1 debe de satisfacer

(i) $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1$; (ii) $x_1 + y_1 + z_1 = 1$

Mead

con $z_1 = 0$

i) $x_1^2 + y_1^2 = 0$; (ii) $x_1 + y_1 = 1$

$\Rightarrow$ $y_1 = 1$ y $x_1 = 0$

Por lo que $P_1(0, 1, 0)$

$\Rightarrow r = \|(0,1,0) - (1/3, 1/3, 1/3)\|$

$= \|(-1/3, 2/3, -1/3)\|$

$= \sqrt{6/9} = \sqrt{6}/3$

ok

Por otro lado, en un cono se tiene que:

$$\|P_0P - P_0P^*\|^2 = k^2 \|P_0P^*\|^2$$

con P un pto. en el cono; P^* un pto sobre el eje del cono y P_0 el vértice.

Haciendo:

$P = P_1 = (0,1,0)$; $P^* = \mathcal{C} = (1/3, 1/3, 1/3)$ y

$P_0 = (1,1,1)$

$\|(-1, 0, -1) - (-2/3, -2/3, -2/3)\|^2 = k^2 \|(-2/3, -2/3, -2/3)\|^2$

$\|(-1/3, 2/3, -1/3)\|^2 = k^2 (12/9)$

$6/9 = k^2 (12/9)$

$k^2 = 1/2$

iii) la ecuación del cono está dada por

$\|P_0P - P_0P^*\|^2 = k^2 \|P_0P^*\|^2$

Considerar $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

Como $\vec{P_0P^*}$ y $\hat{n}$ están sobre el eje del cono, $\vec{P_0P^*} = \alpha \hat{n}$. Pero $\|\hat{n}\| = 1$

$\Rightarrow \alpha = \text{Proy}_{P_0P} \hat{n}$

$$\text{Proy}_{P_0P} \hat{n} = P_0P \cdot \hat{n}$$

$$= (x-1, y-1, z-1) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) - \frac{1}{\sqrt{3}}(y-1) - \frac{1}{\sqrt{3}}(z-1)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\left[x+y+z-3\right]$$

Por lo que

$$\vec{P_0P^*} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z-3]\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}(x+y+z-3,\ x+y+z-3,\ x+y+z-3)$$

y $\|P_0P^*\|^2 = \frac{1}{3}(x+y+z-3)^2$

$\Rightarrow$ la ecuación del cono queda:

$$\left\|(x-1, y-1, z-1) - \frac{1}{3}(x+y+z-3, x+y+z-3, x+y+z-3)\right\|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}(x+y+z-3)^2\right)$$

$$\left\|\frac{1}{3}(2x-y-z, -x+2y-z, -x-y+2z)\right\|^2 = \frac{1}{6}(x+y+z-3)^2$$

$$\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z\right)^2$$

$$= \frac{1}{6}(x+y+z-3)^2$$

$$\frac{4}{9}x^2+\frac{1}{9}y^2+\frac{1}{9}z^2-\frac{4}{9}xy-\frac{4}{9}xz+\frac{2}{9}yz+\frac{4}{9}y^2+\frac{1}{9}x^2$$

$$+\frac{1}{9}z^2-\frac{4}{9}xy-\frac{4}{9}yz+\frac{2}{9}xz+\frac{4}{9}z^2+\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{9}y^2$$

$$-\frac{4}{9}xz-\frac{4}{9}yz+\frac{2}{9}xy-\frac{1}{6}\left(x^2+y^2+z^2+2xy-2xz\right.$$

$$\left.+2yz-6x-6y-6z+9\right)$$

$\therefore$ La ec. del cono queda

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}z^2-xy-xz-yz+x+y+z-\frac{3}{2}=0$$

$$x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz+2x+2y+2z-3=0$$

El cono se ve: