Dominguez Aguilar Saul 4068 G A II

Tarea

1) Dados $\Pi: x+y+z=1$ y el cono $\phi: xy+yz+zx=0$ determinar su intersección.

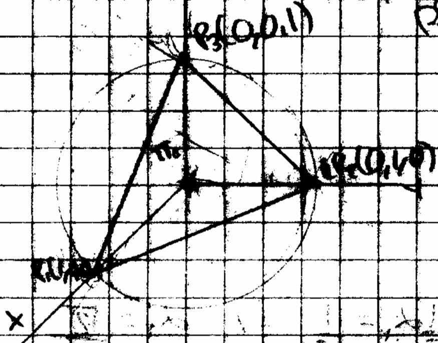
$\Pi: x+y+z=1$
$\phi: xy+yz+zx=0$

$P_1(1,0,0)$, $P_2(0,1,0)$ y $P_3(0,0,1)$ satisfacen Π y ϕ

donde la distancia al origen de P_1, P_2 y P_3 es la misma

$d(P_1,\bar{O}) = d(P_2,\bar{O}) = d(P_3,\bar{O}) = \sqrt{1} = 1$

$\therefore$ P_1, P_2 y P_3 tienen el mismo radio con respecto al cono ϕ entonces la intersección de Π y ϕ es una circunferencia que pasa por P_1, P_2 y P_3.



Encuentro dos vectores ortonormales que me definan un sistema coordenado sobre Π tomando a P_1 como origen.

$P_2 - P_1 = (0,1,0)-(1,0,0) = (-1,1,0)$

$\therefore u_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$P_0 - P_1 = (x,y,z)-(1,0,0) = (x-1,y,z)$, con $P_0 \in \Pi$, $P_0(x,y,z)$

donde $(P_0-P_1)\cdot(P_2-P_1) = 0$ para encontrar dos vectores ortogonales sobre Π

$(-1,1,0)\cdot(x-1,y,z) = 1-x+y=0$ con $x+y+z=1$

$1-x+y=0$ Sup: $x=2$ $\Rightarrow y=1$
$x+y+z-1=0$ $\Rightarrow z=-2$

$\therefore (-1,1,0)\cdot(x-1,y,z) = (-1,1,0)\cdot(1,1,-2) = -1+1=0$

$\therefore u_2 = (1,1,-2)\frac{1}{\sqrt{6}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$

Se que $u_1\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ y $u_2\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$ son vectores ortonormales sobre π

$\therefore\ \pi: P = (1,0,0) + \alpha\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) + \alpha_2\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right) = (x,y,z)$

$x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\alpha_2$

$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\alpha_2$

$z = -\frac{2}{\sqrt{6}}\alpha_2$

Son las transformaciones de coordenadas donde $P_1(1,0,0)$ es $\tilde{P}_1(0,0)$

$P_2(0,1,0)$

$0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = \sqrt{2}$ $\quad \therefore \tilde{P}_2(\sqrt{2},0)$

$1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\alpha_2$

$0 = -\frac{2}{\sqrt{6}}\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = 0$

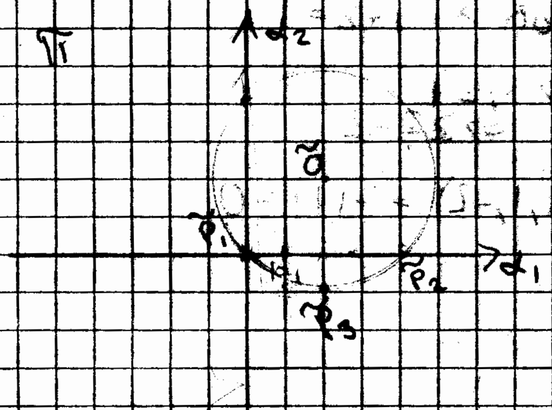
$P_3(0,0,1)$

$0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\alpha_2 \Rightarrow 0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\alpha_2$

$1 = -\frac{2}{\sqrt{6}}\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore\ \tilde{P}_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$



Como $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3$ pasan por una circunferencia de centro $(\alpha_{10}, \alpha_{20})$

$\alpha_{10}^2 + \alpha_{20}^2 = r^2$

$(\sqrt{2} - \alpha_{10})^2 + (\alpha_{20})^2 = r^2$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha_{10}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{6}}{2} - \alpha_{20}\right)^2 = r^2$

$\alpha_{10}^2 + \alpha_{20}^2 = r^2$

$2 - 2\sqrt{2}\alpha_{10} + \alpha_{10}^2 + \alpha_{20}^2 = r^2$

$\frac{1}{2} - \sqrt{2}\alpha_{10} + \alpha_{10}^2 + \frac{3}{2} + \sqrt{6}\alpha_{20} + \alpha_{20}^2 = r^2$

(1) $\alpha_{10}^2 + \alpha_{20}^2 = r^2$

(3) $2 - 2\sqrt{2}\,\alpha_{10} + \alpha_{10}^2 + \alpha_{20} + \alpha_{20}^2 = r^2$

Por (2) - (1) $2 - 2\sqrt{2}\,\alpha_{10} = 0 \Rightarrow \alpha_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Por (3) - (1)

$2 - 1 + \sqrt{6}\,\alpha_{20} = 0 \Rightarrow \alpha_{20} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$

Por (1) $r^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\therefore$ la circunferencia sobre Π que pasa por $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3$

es $C_1: \left(\alpha_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\alpha_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{2}{3}$

con centro en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ y radio $\sqrt{\frac{2}{3}}$

En el espacio

$x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3-1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$z = +\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Concluimos que la intersección de el plano Π y el cono es una circunferencia (C_1) con centro en $(1/3, 1/3, 1/3)$ y radio igual a $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

(b) Encontrar la forma de las proyecciones de la circunferencia C_α sobre los planos XY, YZ y ZX.

$$C_\alpha: \left(\alpha_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\alpha_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{2}{3}$$

$$C_\alpha: \begin{cases} \alpha_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\cos\theta \\ \alpha_2 + \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\cos\theta + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \alpha_2 = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,\mathrm{sen}\,\theta - \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{array}$$

En el espacio

$$X = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{1}{6}$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{1}{6}$$

$$Z = -\frac{2}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{2}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{2}{6}$$

$$C_\alpha: \begin{cases} X = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta + \dfrac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ Y = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta + \dfrac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ Z = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

Como $P_1(1,0,0)$, $P_2(0,1,0)$ y $P_3(0,0,1)$ pertenecen a C_α y $P_0\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ es su centro

Los radios P_0P_1, P_0P_2 y P_0P_3 hacen un mismo ángulo con los ejes X, Y y Z respectivamente, la circunferencia C_α tiene una simetría con respecto a sus proyecciones sobre XY, YZ, ZX, en donde las 3 proyecciones son simétricas.

Por consiguiente sólo es necesario encontrar el lugar geométrico de 1 proyección para observar su forma de las 3 proyecciones.

Tomo la proyección de la circunferencia C_α sobre YZ, es decir $x=0$.

$$E_{YZ}: \begin{cases} y = \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\theta \\ z = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{(z-1/3)3}{-2} = \frac{3z-1}{-2}$$

$$y = \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta - \frac{(z-1/3)}{2} \Rightarrow \cos\theta = \left[y - 1/3 + \frac{(z-1/3)}{2}\right]\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3}\left[\frac{2y-2/3}{2} + \frac{z-1/3}{2}\right]$$

$$= \sqrt{3}\left[\frac{2y+z-1}{2}\right]$$

ya que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

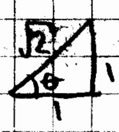
$$E_{YZ}: \left(\frac{3z-1}{2}\right)^2 + \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(2y+z-1)\right]^2 = 1$$

$$\frac{9z^2-6z+1}{4} + \frac{3}{4}\left(4y^2+z^2+1+4yz-4y-2z\right) = 1$$

$$E_{YZ}: 3y^2 + 3yz + 3z^2 - 3y - \frac{3}{2}z + 1 = 1$$

Aplico una rotación con θ donde $\tan\theta = \frac{(C-A) \pm \sqrt{(C-A)^2 + B^2}}{B}$

$$\tan\theta = \frac{(3-3) + \sqrt{3^2}}{3} = \frac{1}{1}$$



$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ Las ecuaciones de rotación son

$$y = y'\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - z'\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \quad y \quad z = y'\frac{1}{\sqrt{2}} + z'\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{y'-z'}{\sqrt{2}}$$

$$z = \frac{y'+z'}{\sqrt{2}}$$

$$E_{YZ}: 3y^2 + 3yz + 3z^2 + 3y - \frac{3}{2}z + 1 = 1$$

$$y = \frac{y' - z'}{\sqrt{2}} \quad , \quad z = \frac{y' + z'}{\sqrt{2}}$$

$$E_{YZ}: 3\left(\frac{y'-z'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3\left(\frac{y'-z'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{y'+z'}{\sqrt{2}}\right) + 3\left(\frac{y'+z'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 3\left(\frac{y'-z'}{\sqrt{2}}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{y'+z'}{\sqrt{2}}\right) + 1 = 1$$

$$\frac{3}{2}\left(y'^2 + \cancel{2y'z'} + z'^2\right) + \frac{3}{2}\left(y'^2 + \cancel{y'z'} - \cancel{y'z'} - \cancel{z'^2}\right) + \frac{3}{2}\left(y'^2 + \cancel{2y'z'} + \cancel{z'^2}\right)$$

$$-\frac{3}{\sqrt{2}}(y' - z') - \frac{3}{2\sqrt{2}}(y' + z') + 1 = 1$$

$$\left(\frac{9}{2}y'^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}y' - \frac{3}{\sqrt{2}}y'\right) + \left(\frac{3}{2}z'^2\right) + 1 = 1$$

$$\frac{9}{2}\left(y'^2 - \frac{4}{3\sqrt{2}}y' + \frac{2}{9}\right) + \frac{3}{2}z'^2 = 1$$

$$\frac{9}{2}\left(y' - \frac{2}{3\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{3}{2}z'^2 = 1$$

$$\therefore \frac{\left(y' - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}{2/9} + \frac{(z' - 0)^2}{2/3} = 1$$ representa una elipse rotada que es E_{YZ} rotada.

Como la proyección de la circunferencia C_a sobre YZ es una elipse las otras dos proyecciones también son elipses.

$F(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$

Encontrar un cono que tiene vertice en el origen y contiene a los ejes x, y, z

El cono no tiene terminos independientes ya que pasa por el origen.

$\varphi: Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx = 0$

todos los puntos de las rectas $\alpha(1,0,0)$, $\beta(0,1,0)$ y $\gamma(0,0,1)$ estan en el cono

$\therefore A\alpha^2 = 0$ y $B\beta^2 = 0$, $C\gamma^2 = 0$

$\varphi: Dxy + Eyz + Fzx = 0$

Si le quito D, E y F aun asi todos los puntos

$(\alpha,0,0), (0,\beta,0)$ y $(0,0,\gamma)$ sigue cumpliendo φ y tambien $(0,0,0)$

$\therefore \varphi: \underline{\underline{xy + yz + zx = 0}}$ // se puede obtener a partir de $F(x,y,z)$