Geometría Analítica II — Trabajo 15
Juan Salvador Garza Ledesma — 18/mar./2005

① Comprueba que la ecuación

$C: xy + yz + zx = 0$ representa un cono con vértice en el origen (un cono circular recto) cuya ecuación puede obtenerse de la ecuación general:

$F: Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz = 0$

La ecuación F debe representar un cono con vértice en $(0,0,0)$, si hacemos

$f(x,y,z) := Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz$ claramente $f(0,0,0) = 0$ por lo que $(0,0,0)$ cumple F y por tanto está en la superficie.

* Además, dado un punto cualquiera $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in F$ tenemos que $\forall k \in \mathbb{R}$:

$$f(kx_0, ky_0, kz_0) = Ax_0^2k^2 + By_0^2k^2 + Cz_0^2k^2 + Dk^2x_0y_0 + Ek^2y_0z_0 + Fk^2x_0z_0 =$$
$$= k^2(Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + Dx_0y_0 + Ey_0z_0 + Fx_0z_0) =$$
$$= k^2 f(x_0, y_0, z_0) = k^2 \cdot 0 = 0$$

es decir, $(kx_0, ky_0, kz_0) \in F$, pero $P = (kx_0, ky_0, kz_0)$ representa la ecuación explícita de la recta que pasa por el origen y por P_0, si esta recta pertenece toda a F y esto se puede hacer $\forall Q \in F$ entonces F debe ser un cono.

Si forzamos a que la recta $P_y = (0, k, 0)$ pertenezca a F (el eje Y) se debe cumplir que

$f(0,k,0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$, esto se da si y sólo si

$A \cdot 0 + Bk^2 + C \cdot 0 + D \cdot 0 \cdot k + E \cdot k \cdot 0 + F \cdot 0 = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$

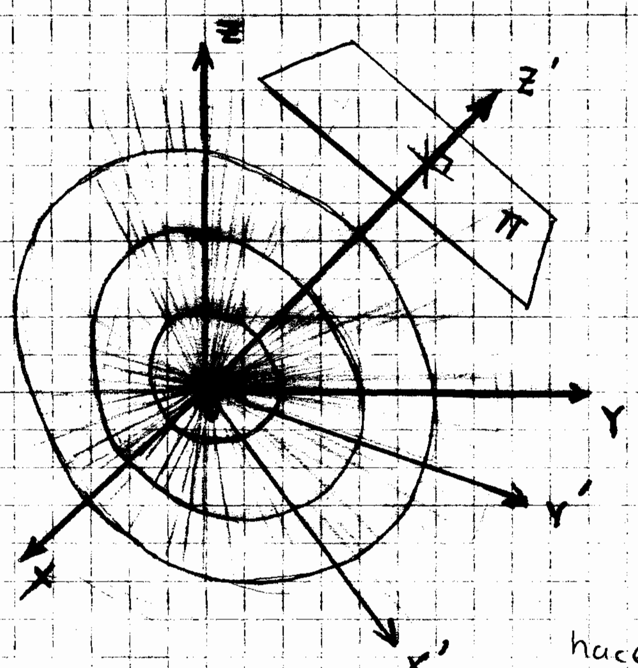
$\Leftrightarrow \quad Bk^2 = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow B = 0$ por lo que el cono debe ser de la forma:

$Ax^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz = 0$ si en esta nueva expresión pedimos que el eje X pertenezca a la superficie, de manera análoga se obtiene que el coeficiente en x^2 debe ser cero, como también, si uno pide que el eje Z esté en el cono, la expresión queda en la forma:

$Dxy + Eyz + Fxz = 0$ que sería entonces la forma general de la ecuación de un cono que tiene vértice en el origen y que contiene a los 3 ejes coordenados

En el caso particular en que $D = E = F$ se obtiene nuestro cono $xy + yz + xz = 0$

Ahora, una forma de encontrar la intersección del cono $xy + yz + xz = 0$ con el plano $x + y + z = 1$ de manera sencilla es observando que el vector normal a dicho plano $(\Pi: x+y+z=1)$ es $(1,1,1)$, de modo que si rotáramos el sistema $O-XYZ$ hasta que algún eje coincida con la recta que define el vector normal a Π la ecuación de Π se simplificaría a alguna de las formas: $x = k$, $y = k$ ó $z = k$, dependiendo qué eje elijamos; la ventaja de estas expresiones es que sustituirlas en la ecuación del cono nos sería muy fácil para averiguar así, qué curva representa $\Pi \cap C$:



Tomemos como eje Z' la recta (k,k,k), $k \in \mathbb{R}$, un vector sobre éste, como ya mencionamos es $(1,1,1)$, para elegir los otros dos vectores de referencia hagamos en ambos $z = 0$, tenemos que deben ser de la forma

$$u_1 = (a, b, 0)$$

$$u_2 = (c, d, 0),$$ llamemos $u_3 := (1,1,1)$, podemos hacer $u_1 \cdot u_3 = 0$ con

$u_1 = (1,-1,0)$, para obtener u_2, basta hacer $u_2 = u_1 \times u_3$, haciendo este cálculo resulta $u_2 = (1, 1, -2)$.

Si normalizamos u_1, u_2 y u_3 tenemos:

$$v_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$v_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$v_3 = \frac{1}{\|u_3\|} u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Esto con el propósito de tener una matriz de transformación amigable (ortogonal).

Queremos expresar cualquier punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3, dado que elegimos vectores ortonormales, las coordenadas (x', y', z') de un punto con respecto al nuevo sistema se ven en el original simplemente como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x'v_1 + y'v_2 + z'v_3$$ que puesto matricialmente

es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z' \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z' \\ z = -\frac{2}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z' \end{cases}$$

De aquí que el plano $\Pi: x+y+z=1$ se ve en el nuevo sistema como:

$$\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}x'} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{6}}y'} + \frac{1}{\sqrt{3}}z' - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}x'} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{6}}y'} + \frac{1}{\sqrt{3}}z' - \cancel{\frac{2}{\sqrt{6}}y'} + \frac{1}{\sqrt{3}}z' = 1 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{3}z' = 1 \Longleftrightarrow z' = \frac{1}{\sqrt{3}} := \Pi'$$

Ahora hagamos la talachita de ver como luce el cono C en el nuevo sistema, tenemos

$$xy + yz + zx = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'\right) \cdot$$

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'\right) + \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt2}x' + \frac{1}{\sqrt6}y' + \frac{1}{\sqrt3}z'\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt2}x' - \frac{1}{\sqrt6}y' + \frac{2}{\sqrt3}z'\right) +$$

$$+\left(-\frac{1}{\sqrt2}x' + \frac{1}{\sqrt6}y' + \frac{1}{\sqrt3}z'\right)\cdot\left(+\frac{2}{\sqrt6}y' + \frac{1}{\sqrt3}z'\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{6}y'^2 + \frac{2}{3}z'^2 - \cancel{\frac{2}{2\sqrt3}x'y'} + \cancel{\frac{1}{3\sqrt2}y'z'} + \cancel{\frac{1}{\sqrt6}z'x'}$$

$$+\frac{2}{6}y'^2 + \frac{1}{3}z'^2 + \cancel{\frac{2}{2\sqrt3}x'y'} - \cancel{\frac{1}{\sqrt6}z'x'} - \cancel{\frac{1}{3\sqrt2}y'z'} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 + z'^2 = 0$$

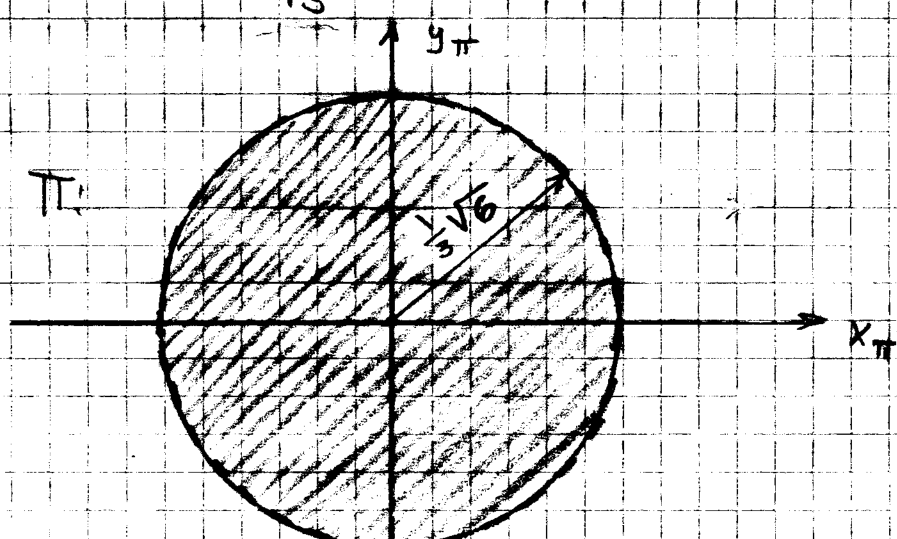
$$\Leftrightarrow x'^2 + y'^2 = 2z'^2 := C'$$

Y ahora sí qué felicidad, encontrar la intersección que andamos buscando es muy fácil, si sustituimos $z' = \frac{1}{\sqrt3}$ en C' tenemos:

$$x'^2 + y'^2 = 2\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

lo cual claramente es una circunferencia con centro en el 'origen' y radio $\frac{\sqrt2}{\sqrt3} = \frac{1}{3}\sqrt6$ que vive en Π con respecto a O-XYZ: aquí 'el origen' debe interpretarse como el punto de coordenadas $(0, 0, \frac{1}{\sqrt3})$ con respecto a O-$X'Y'Z'$.

Plano Π:



Mediante la transformación que obtuvimos $O\cdot x'y'z' \longmapsto O\cdot xyz$ podemos encontrar fácilmente el centro de la circunferencia hallada con respecto al sistema original, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0 + \tfrac{1}{\sqrt{6}}\cdot 0 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{3}} \\ y &= 0 + 0 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{3}} \\ z &= 0 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Que es justamente el punto en el cual la recta (k,k,k); $k\in\mathbb{R}$ perfora al plano $\pi: x+y+z=1$, de aquí vemos que entonces realmente C es un cono circular recto con vértice en $(0,0,0)$ y eje la recta mencionada, en particular la circunferencia que obtuvimos es una generatriz del cono.

Sólo falta hallar las proyecciones de la circunferencia con los planos coordenados.

Es una ociosidad calcular esto 3 veces si uno observa que la ecuación del plano π es simétrica en las 3 variables, es claro que las proyecciones que estamos buscando son todas la misma figura pero en distinta posición.

Ya que tenemos el centro y el radio de la circunferencia con respecto al sistema original, podemos ver a ésta como el lugar geométrico de los puntos que cumplen simultáneamente con las ecuaciones de π y la esfera con centro en $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ y radio $\frac{1}{3}\sqrt{6}$, esto es, considerar simultáneamente:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \;\ldots\; \pi \\ (x-\frac{1}{3})^2+(y-\frac{1}{3})^2+(z-\frac{1}{3})^2=\frac{2}{3} \;\ldots\; \mathcal{E} \end{cases}$$

Jugando con la ecuación π tenemos:

$$(x-\tfrac{1}{3})+(y-\tfrac{1}{3})+(z-\tfrac{1}{3}) = 1-\tfrac{3}{3} = 0$$

Como nos cae bien el $\mathbb{R}^2$ viejito en XY, hagamos la proyección sobre este plano. Para ello primero simplifiquémonos la vida con la transformación

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\\ \tilde{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

para obtener información geométrica más rápidamente, así las ecuaciones anteriores quedan como:

$$\tilde{\mathcal{E}}: \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = \frac{2}{3}$$

$$\tilde{\Pi}: \tilde{x} + \tilde{y} + \tilde{z} = 0 \iff \tilde{z} = -(\tilde{x} + \tilde{y})$$

$$\Longrightarrow \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + (-(\tilde{x} + \tilde{y}))^2 = \frac{2}{3} \iff 2\tilde{x}^2 + 2\tilde{y}^2 + 2\tilde{x}\tilde{y} = \frac{2}{3}$$

$$\iff \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{x}\tilde{y} = \frac{1}{3} \quad \ldots (\text{Proy})$$

Si recordamos el trabajo anterior, la transformación de pereza que conviene ahora es:

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{pmatrix}$$

Que es una rotación de $\frac{\pi}{4}$ radianes del sistema local.

Con esto, (Proy) queda como:

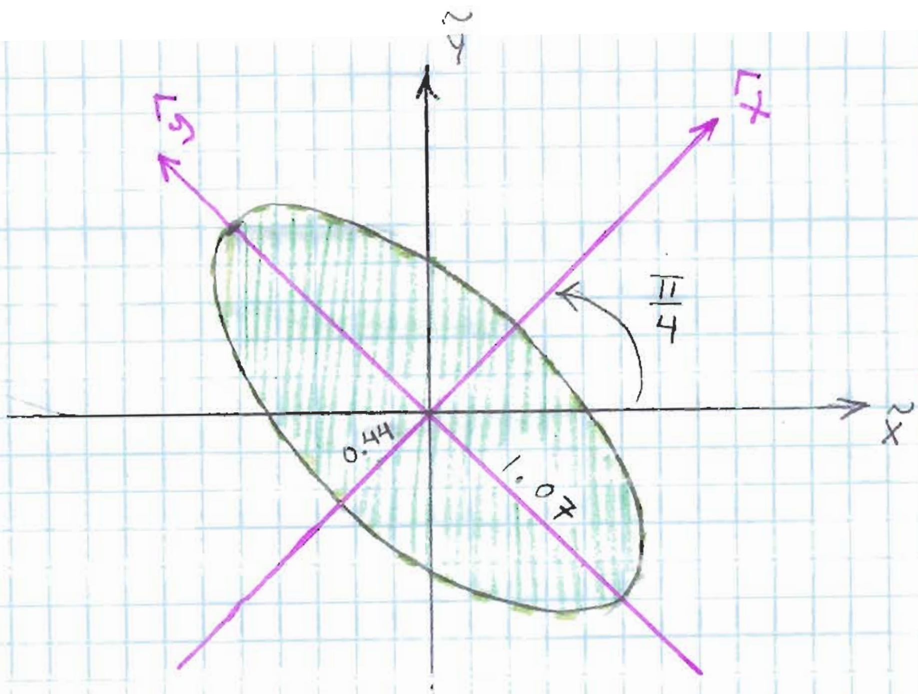
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2(\hat{x} - \hat{y})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2(\hat{x} + \hat{y})^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + \hat{y})(\hat{x} - \hat{y}) = \frac{1}{3}$$

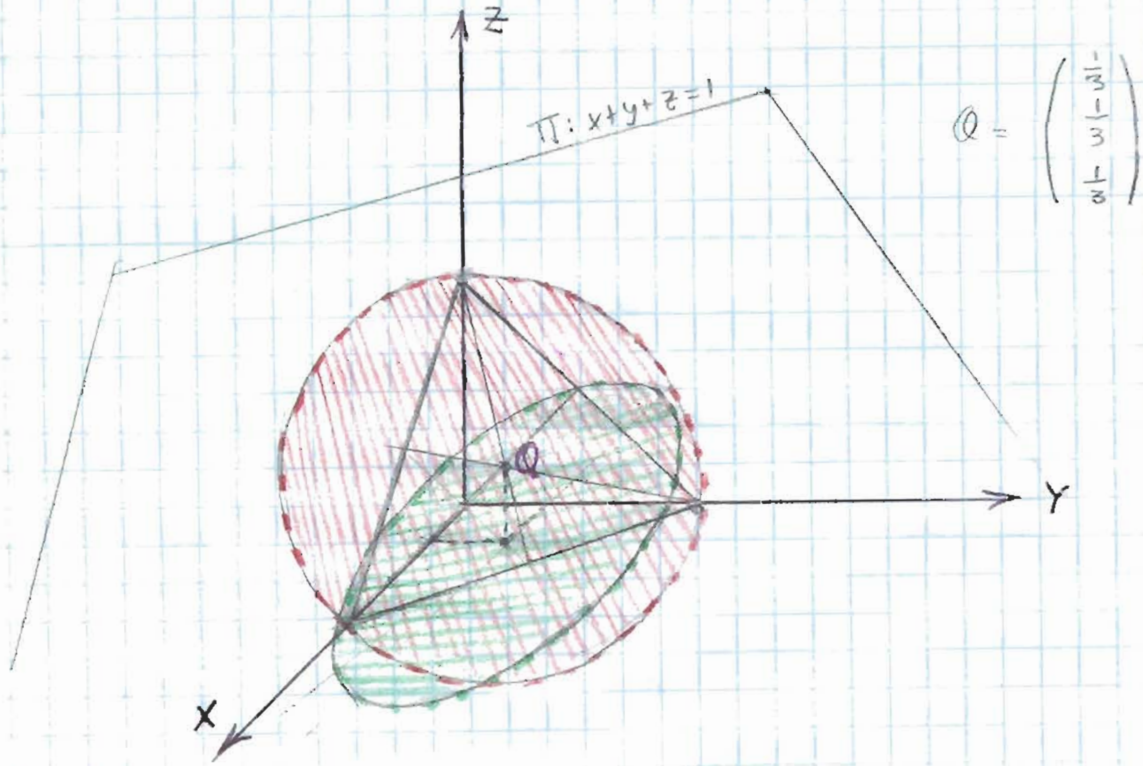
$$\iff \hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x}^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{y}^2 = \frac{1}{3}$$

$$\iff 3\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{x}^2 + 3\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{y}^2 = 1$$

$$\iff \frac{\hat{x}^2}{\frac{1}{3(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})}} + \frac{\hat{y}^2}{\frac{1}{3(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})}} = 1$$

que es la elipse que andamos buscando.





Observación: el centro del círculo también puede obtenerse considerando el triángulo equilátero que forman las intersecciones del plano Π con los ejes coordenados, como dicho triángulo es equilátero, su baricentro es también circuncentro y $\therefore$ el centro Q buscado sería

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$