Geometría Analítica II — Trabajo #4

Juan Salvador Garza Ledesma — 16/mar./2005

En clase obtuvimos una representación para una circunferencia de radio 1 y centro en $(1,1,-1)$ en el plano $\Pi: x+y+z=1$;

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad ; \quad \alpha^2+\beta^2=1$$

De aquí se obtuvo la expresión

$$\left[-\frac{\sqrt{6}}{2}(x-1)\right]^2 + \left[-\sqrt{2}\left((y-1)+\frac{1}{2}(x-1)\right)\right]^2 = 1 \quad \ldots (\mathrm{I})$$

Que es la proyección de la circunferencia sobre el plano coordenado xY, la cual, se sospecha, es una elipse, notemos que una primer simplificación que se le puede hacer a (I) es aplicar una traslación de los ejes xY al punto de referencia $(1,1,0)$, es decir, consideramos un nuevo sistema $\tilde{x}\tilde{Y}$ trasladado tal que

$\tilde{x} = x-1$; $\tilde{y} = y-1$, así, la ecuación (I) queda de la forma:

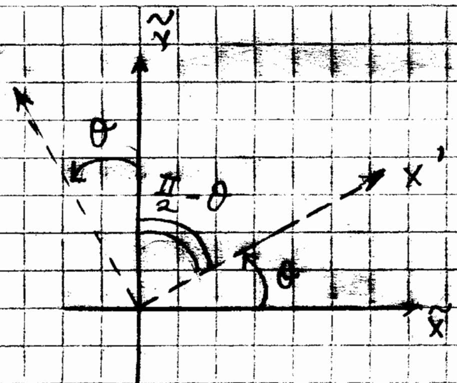
$$\left[-\frac{\sqrt{6}}{2}\tilde{x}\right]^2 + \left[-\sqrt{2}\left(\tilde{y}+\frac{1}{2}\tilde{x}\right)\right]^2 = 1.$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\tilde{x}^2 + 2\left(\tilde{y}+\frac{1}{2}\tilde{x}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow 2\tilde{x}^2+2\tilde{y}^2+2\tilde{x}\tilde{y} = 1 \ldots (\tilde{\mathrm{I}})$$

la ecuación $(\tilde{\mathrm{I}})$ se puede simplificar aun más mediante una rotación de los ejes $\tilde{x}\tilde{y}$ a un nuevo par de ejes $x'y'$.

Supongamos que este nuevo par de ejes se obtiene rotando un ángulo θ cada uno de los ejes $\tilde{x}$ y $\tilde{Y}$ en el mismo sentido, suponiendo además que θ esté restringido a:

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$



Entonces los cosenos directores del nuevo eje x' con respecto al sistema original serán

$$\cos\theta,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right),\ \text{pero}$$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{sen}\theta$, $\therefore$ los cosenos directores del nuevo eje x' son $\cos\theta\ \operatorname{sen}\theta$.

Para el eje Y', tenemos que el ángulo que forma con $\tilde{X}$ es $\theta+\frac{\pi}{2}$, claramente, por hipótesis, el ángulo que forma con $\tilde{Y}$ es θ, de modo que sus cosenos directores serán

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right),\ \cos\theta,\ \text{pero } \cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{sen}\theta,$$

Como vamos a tomar x', Y' como nuevos ejes coordenados y como $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ y $(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ son vectores unitarios en dirección de los ejes x' y Y' respectivamente, nuestra transformación va a tener la forma general:

$$(\tilde{x},\tilde{y}) = x'(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + y'(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \quad \text{o bien}$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} \iff \boxed{\begin{aligned}\tilde{x} &= x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta\\ \tilde{y} &= x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta\end{aligned}} \ \ldots\ (*)$$

Estas ecuaciones son las que vamos a usar desesperadamente para simplificar las ecuaciones de las proyecciones que andamos buscando, si en la ecuación

$$2\tilde{x}^2+2\tilde{y}^2+2\tilde{x}\tilde{y}=1 \quad \text{usamos } (*) \text{ obtenemos:}$$

$$2(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)^2 + 2(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta)^2 + 2(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)\cdot$$

$$\cdot(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta) = 1$$

. nos interesa eliminar el término en $x'y'$, si reagrupamos esta expresión obtenemos que el coeficiente de $x'y'$ es:

$$-4\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta$$

Que es simplemente $2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$, si imponemos

$2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = 0$ tenemos que esto es equivalente a:

$\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 0 \iff \cos 2\theta = 0$ como estamos restringiendo a θ a $[0, \frac{\pi}{2})$ tenemos $2\theta = \frac{\pi}{2} \iff \theta = \frac{\pi}{4}$, como $\cos\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, la transformación es

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} \tilde{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ \tilde{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{array}$$

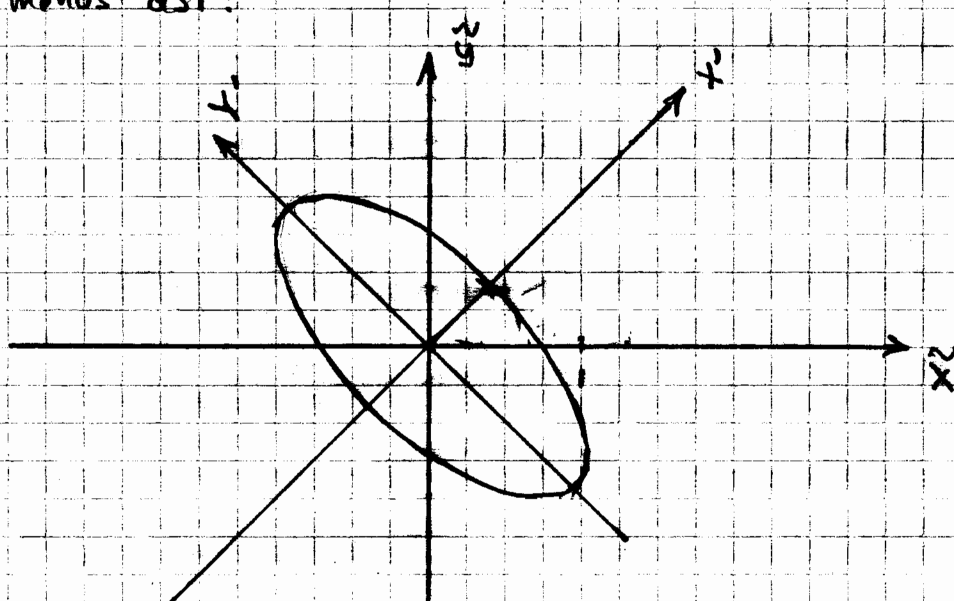
sustituyendo esto en $(\tilde{I})$ tenemos

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')(x'-y') = 1$$

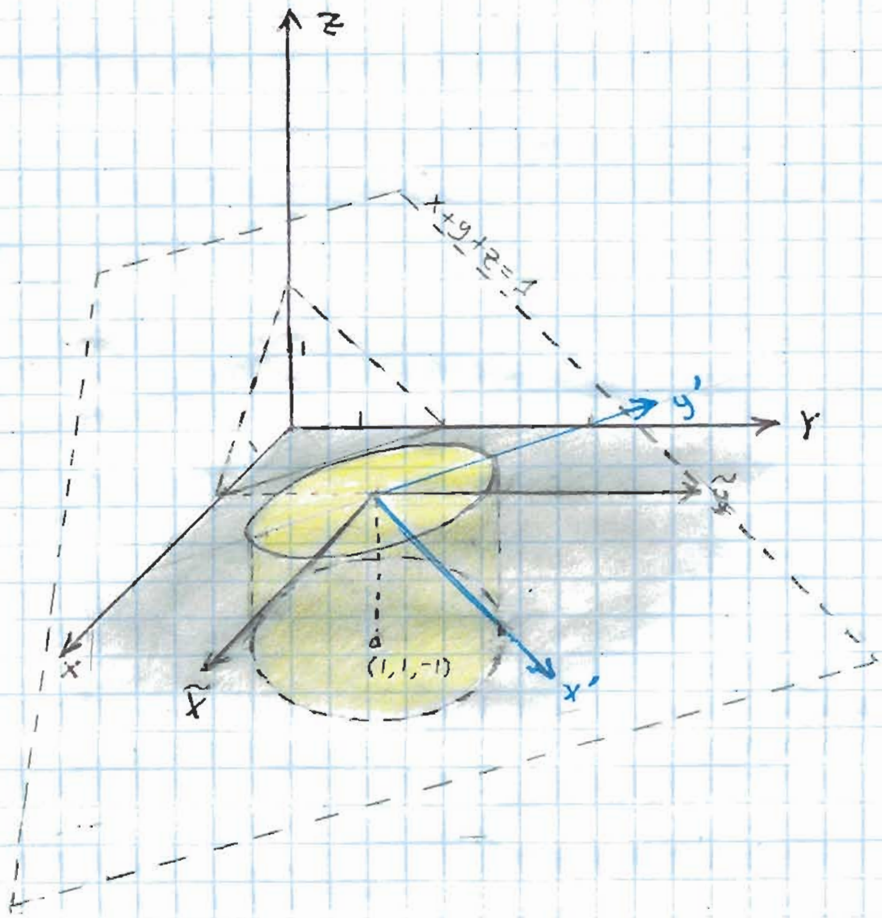
$$\iff (x'-y')^2 + (x'+y')^2 + \sqrt{2}(x'^2 - y'^2) = 1$$

$$\iff (2+\sqrt{2})x'^2 + (2-\sqrt{2})y'^2 = 1 \iff \frac{x'^2}{\frac{1}{2+\sqrt{2}}} + \frac{y'^2}{\frac{1}{2-\sqrt{2}}} = 1$$

Que es claramente una elipse que en el plano local $\tilde{x}\tilde{y}$ se ve más o menos así:



y en el espacio se ve algo por el estilo:



Para ver la proyección de la circunferencia en el plano YZ, podemos interpretar a la circunferencia como la intersección de la esfera unitaria con centro en $(1,1,-1)$ y el plano $x+y+z=1$, es decir, considerando el lugar geométrico de los puntos (x,y,z) que cumplen simultáneamente:

$$\begin{cases} x+y+z=1 & \ldots \Pi \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=1 & \ldots \mathcal{E} \end{cases}$$

Para proyectar en el plano YZ, usemos Π para obtener una expresión de x en función de y y z para sustituirla en $\mathcal{E}$, tenemos:

$$x+y+z=1 \iff x-1+y-1+z+1=1-1-1+1=0$$

$\iff (x-1)+(y-1)+(z+1)=0 \iff (x-1)=(1-y)+(-1-z)$, sustituyendo en $\mathcal{E}$:

$$\left[(1-y)-(1+z)\right]^2+(y-1)^2+(z+1)^2=1 \ldots \quad (\mathrm{II})$$

Nuevamente observemos que esta expresión se simplifica bastante trabajando con transformaciones en el plano coordenado YZ.

El punto (1, 1, −1) que es el centro de la circunferencia que se construyó, proyectado en YZ es simplemente (0, 1, −1), o mirándolo localmente en el plano YZ, es simplemente (1, −1), este punto debe ser el centro de la figura que estamos revisando. Trasladamos los ejes YZ al punto de referencia (1, −1), i.e. usemos la transformación

$$\begin{pmatrix}\tilde{y}\\ \tilde{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y\\ z\end{pmatrix},$$ sustituyendo en (II) tenemos:

$$(-\tilde{y}-\tilde{z})^2+\tilde{y}^2+\tilde{z}^2=1 \iff 2\tilde{y}^2+2\tilde{z}^2+2\tilde{y}\tilde{z}=1$$ que es

la misma elipse para fines prácticos que la anterior, esto era intuitivamente previsible si observamos que el plano $x+y+z=1$ se porta simétricamente con respecto a las 3 variables x, y, z, las cuales pueden intercambiar sus papeles en la ecuación sin modificarse ésta, por lo que hicimos anteriormente, sabemos que la transformación:

$$\begin{pmatrix}\tilde{y}\\ \tilde{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y'\\ z'\end{pmatrix}$$ Simplifica la ecuación de la elipse a:

$$\frac{y'^2}{\frac{1}{2+\sqrt{2}}}+\frac{z'^2}{\frac{1}{2-\sqrt{2}}}=1;$$ análogamente podríamos obtener la ecuación de la proyección de la circunferencia sobre el plano ZX la cual con respecto a un sistema local plano obtenido mediante la traslación de los ejes ZX al punto (1, 0, −1) y rotándolos un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes tendrá la forma:

$$\frac{z'^2}{\frac{1}{2+\sqrt{2}}}+\frac{x'^2}{\frac{1}{2-\sqrt{2}}}=1$$

Las tres proyecciones en $\mathbb{R}^3$ se verían más o menos así: