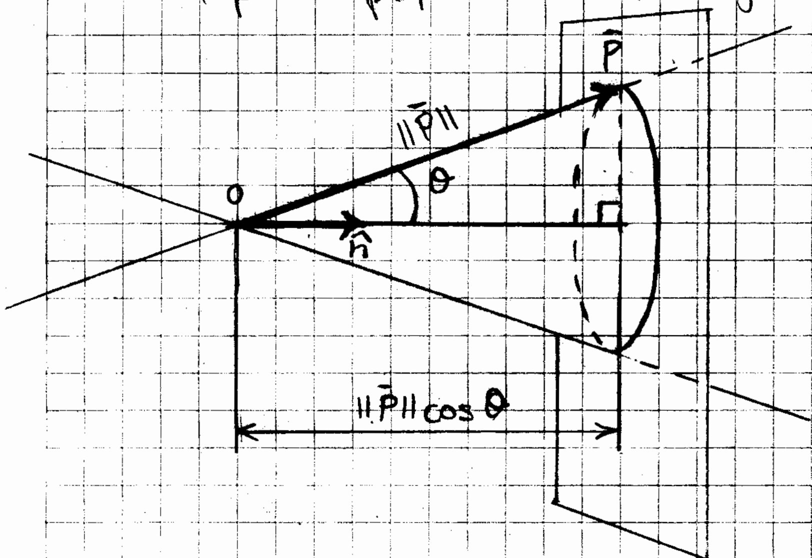
Geometría Analítica II — Trabajo (13)

Juan Salvador ~~Garza~~ Ledesma — 14 / mar. / 2005

(1) Dibuje y ~~de~~ dé la ecuación del cono con vértice en $(0,0,0)$, $\hat{n} = (1,1,0)\frac{1}{\sqrt{2}}$; $k = \frac{1}{2}$.

$$\hat{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Como el vector $\hat{n}$ es unitario, para cualquier punto $\bar{P} := (x, y, z)$ que pertenece al cono tenemos $\bar{P} \cdot \hat{n} = \|\bar{P}\| \cos\theta$ es la magnitud del vector que va del vértice del cono (el origen) al centro de la circunferencia que resulta de seccionar el cono con un plano perpendicular a su eje que pase por $\bar{P}$.

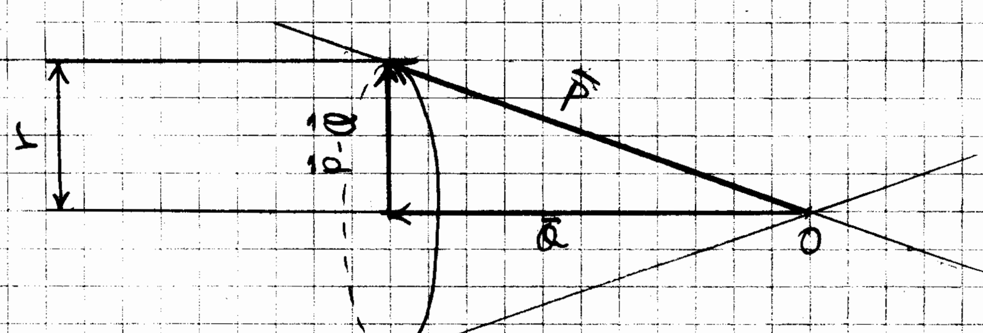


Queremos que ésta magnitud varíe proporcionalmente al radio de la circunferencia mencionada, si r es dicho radio, se quiere imponer:

$k\,\bar{P} \cdot \hat{n} = r$ para una constante k, (que aquí es $\frac{1}{2}$).

Sólo falta determinar r. Sea $\vec{Q}$ el vector que va de O con la dirección de $\hat{n}$ y magnitud $\bar{P} \cdot \hat{n}$, entonces

$\vec{Q} = (P \cdot \hat{n})\, \hat{n}$ y podemos ver a r como la magnitud del vector $\bar{P} - \bar{Q}$ que es $\|\vec{P} - (\bar{P} \cdot \hat{n})\hat{n}\|$



De lo anterior la ecuación del cono puede escribirse como

$\frac{1}{2}\vec{P}\cdot\hat{n} = \|\vec{P}-(\vec{P}\cdot\hat{n})\hat{n}\|$, Sustituyendo $\vec{P}=(x,y,z)$

$\hat{n}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$:

$$\frac{1}{2}(x,y,z)\cdot(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}},0) = \|(x,y,z)-(x,y,z)\cdot(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}},0)(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}},0)\|$$

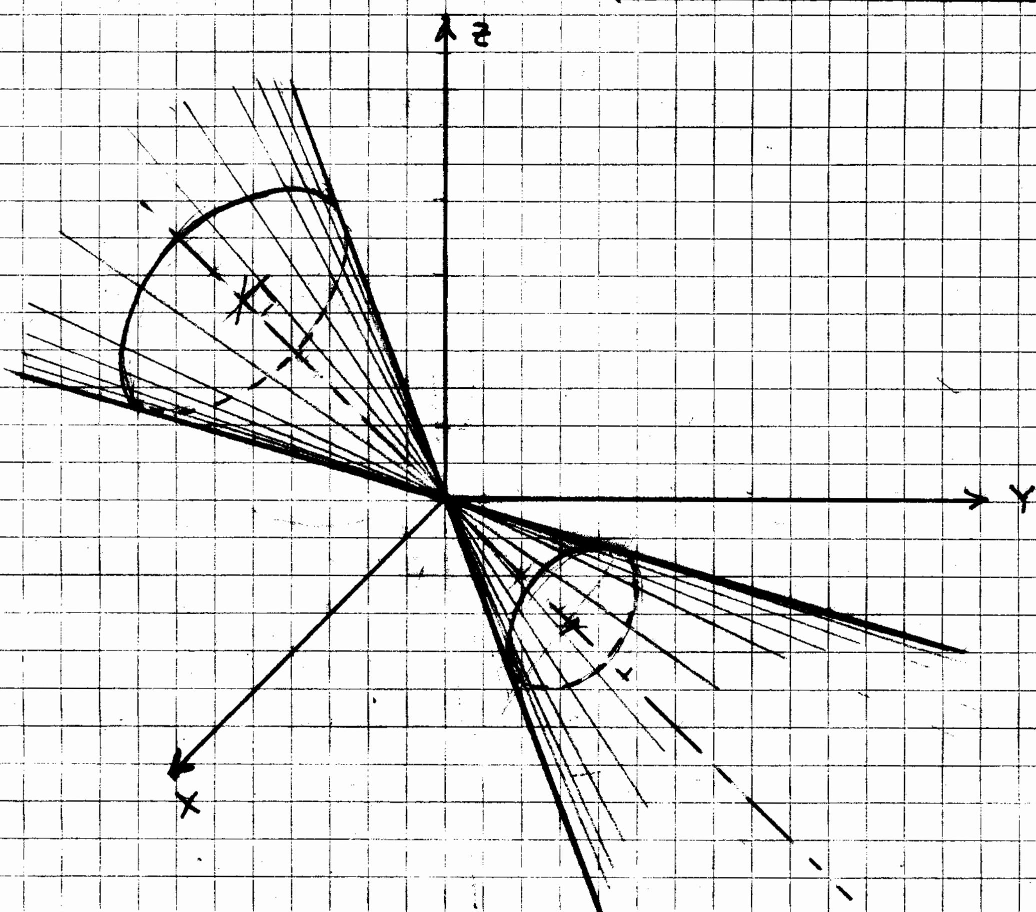
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2\sqrt{2}}y = \|(x,y,z)-(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}y,\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}y,0)\|$$

$$\Leftrightarrow \left((x+y) = 2\sqrt{2}\|(\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}y,\tfrac{1}{2}y-\tfrac{1}{2}x,z)\|\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2xy+y^2) = 2(x-y)^2+2(y-x)^2+8z^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2xy+y^2) = 4(x^2-2xy+y^2)+8z^2$$

$$\Leftrightarrow -3x^2-3y^2-8z^2+10xy=0 \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{3x^2+3y^2+8z^2-10xy=0}$$



② Encuentre las intersecciones del cono anterior con los planos a) $z=1$; b) $x=1$; c) $x+y=1$ y dibújelas.

La ecuación del cono era $3x^2+3y^2+8z^2-10xy=0$, para visualizar más rápidamente las secciones que se piden vamos a aplicar unas transformaciones. (aunque intuitivamente es aceptable que a) corta al cono en una hipérbola, b) en una elipse y c) en un círculo). Vamos a demostrarlo.

Para analizar los casos a), y, c). ~~rotemos~~ el sistema O-XY hasta que el eje X coincida con el eje del cono, al eje Z no lo vamos a mover, los cosenos directores de nuestro nuevo eje X son simplemente las componentes de $\hat{n}$, es decir $\frac{1}{\sqrt{2}}$ con respecto a X y también con respecto a Y, para nuestro nuevo eje Y, como éste debe ser normal a $\hat{n}$, podemos tomar $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ como vector de referencia por ser $\hat{n}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)=0$, de modo que la transformación será:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}; \text{ que es } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x}-\tilde{y}) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x}+\tilde{y}) \\ z = \tilde{z} \end{cases} \cdots (\mathrm{I})$$

El cono en este sistema se ve menos rebelde, usando (I) en su ecuación se tiene:

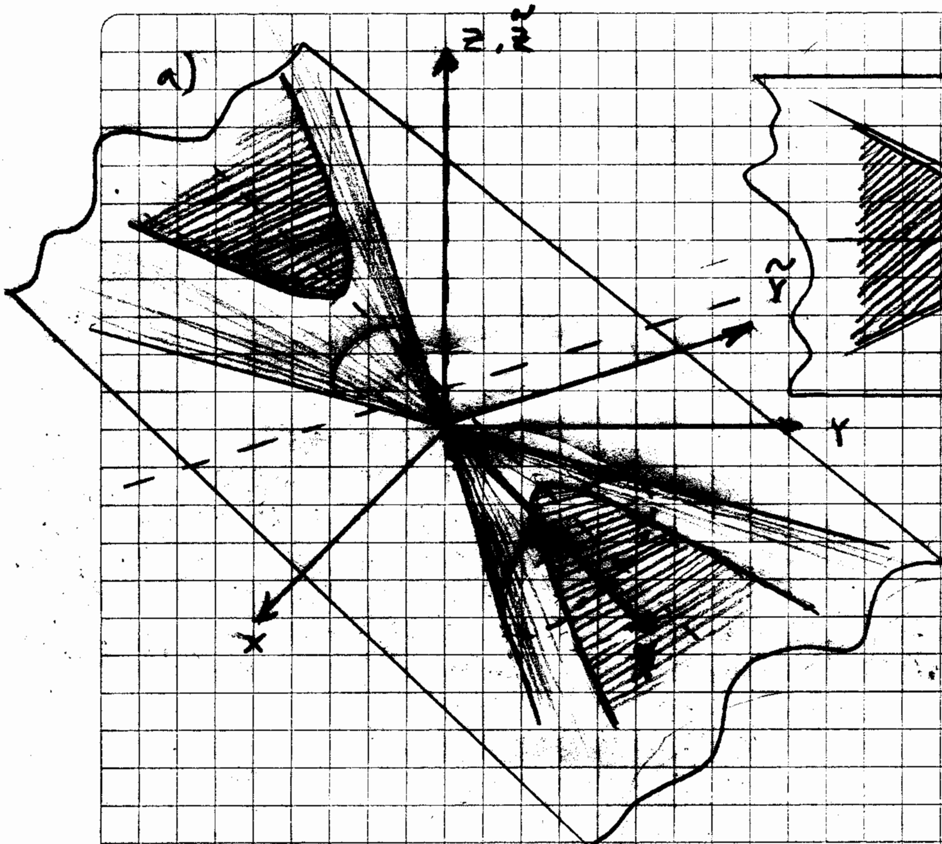
$$3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x}-\tilde{y})\right)^2 + 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x}+\tilde{y})\right)^2 + 8\tilde{z}^2 - 10\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x}+\tilde{y})(\tilde{x}-\tilde{y})\right) = 0$$

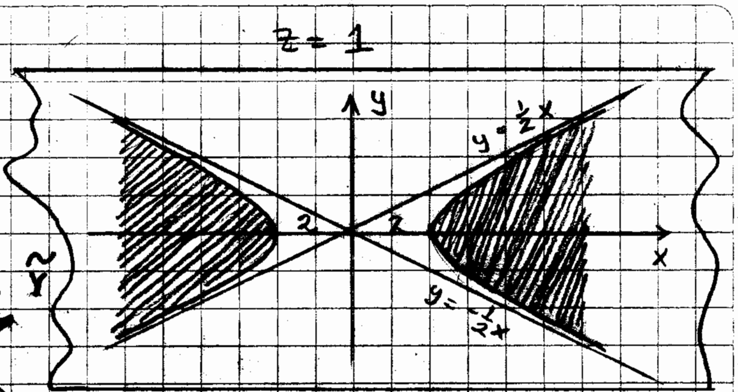
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}(\tilde{x}^2-2\tilde{x}\tilde{y}+\tilde{y}^2) + \frac{3}{2}(\tilde{x}^2+2\tilde{x}\tilde{y}+\tilde{y}^2) + 8\tilde{z}^2 - 5(\tilde{x}^2-\tilde{y}^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\tilde{x}^2+3\tilde{y}^2+8\tilde{z}^2-5\tilde{x}^2+5\tilde{y}^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\tilde{y}^2+\tilde{z}^2 = \frac{1}{4}\tilde{x}^2} \cdots (*)$$

a)
el plano a) sigue siendo $\tilde{z}=1$ por ser $z=\tilde{z}$, si sustituimos esto en $*$ nos queda:

$$\tilde{y}^2 + 1 = \frac{1}{4}\tilde{x}^2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{\tilde{x}^2}{4} - \tilde{y}^2 = 1}$$ que es una hipérbola:





c) (ii)

Para la sección del cono con $x+y=1$, si transformamos este plano visto ahora desde el sistema $O-\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ tenemos

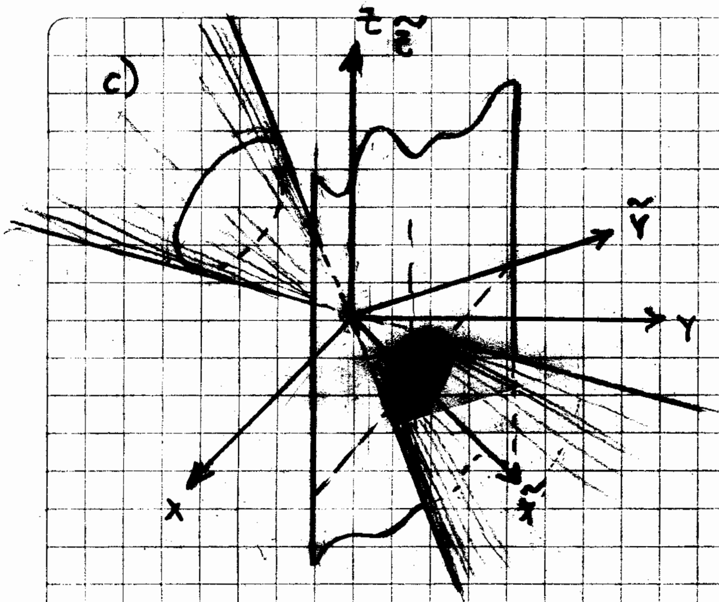
$x+y=1 \iff \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x}-\tilde{y})+\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x}+\tilde{y})=1 \iff \sqrt{2}\,\tilde{x}=1 \iff \tilde{x}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

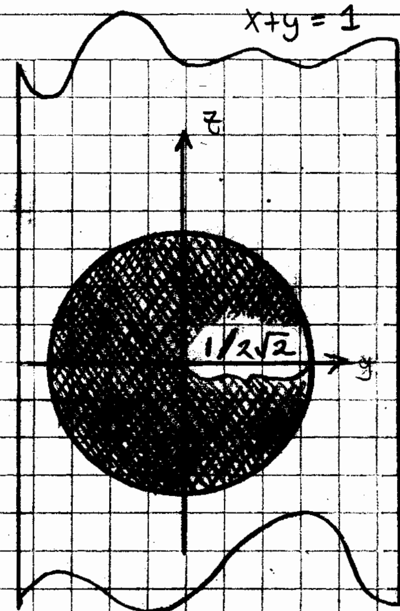
sustituyendo en el cono transformado $\tilde{y}^2+\tilde{z}^2=\frac{1}{4}\tilde{x}^2$ queda

$\boxed{\tilde{y}^2+\tilde{z}^2=\frac{1}{8}}$ que es una circunferencia de radio $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ con centro en $(0,0)$ con respecto al plano coordenado $x+y=1$ cuyo origen con respecto al sistema canónico es $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ que es la intersección de $x+y=1$ con la recta

$\tilde{n}=k(1,1,0)$ que es el eje del cono.

c)





b) Por último para ver que $3x^2+3y^2+8z^2-10xy=0 \cap x=1$ representa una elipse, sustituyamos $x=1$ directamente en la ecuación original, tenemos

$$3+3y^2+8z^2-10y=0 \Leftrightarrow 3y^2-10y+8z^2=-3$$

$$\Leftrightarrow y^2-\frac{10}{3}y+\frac{8}{3}z^2=-1 \Leftrightarrow \left(y-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{8}{3}z^2=-1+\frac{25}{9}=\frac{16}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(y-\frac{5}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}}+\frac{z^2}{\frac{16\cdot 3}{9\cdot 8}}=1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{\left(y-\frac{5}{3}\right)^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^2}=1}$$

que es una elipse!