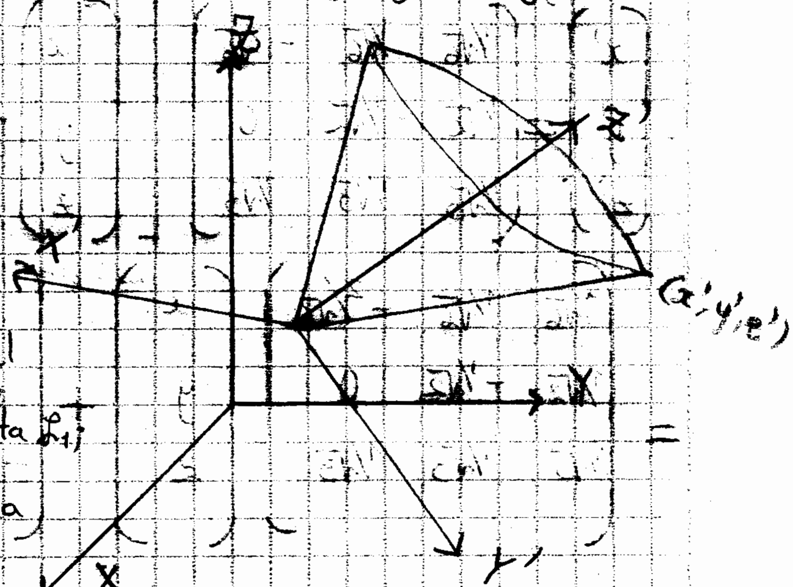
Geometría Analítica 2

Mendoza Luna Luis Guillermo. Trabajo

Escribe la ecuación del cono cuyo vértice es el punto $(1,1,1)$ y cuyo eje es la recta $\mathcal{L}_1 = \{t(2,2,2) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Encontraremos un sistema coordenado $\boxed{O' - X'Y'Z'}$ en el cual la ecuación del cono sea $(x')^2 + (y')^2 = (z')^2$.



El origen de nuestro nuevo sistema será el vértice del cono, y el eje z' será la recta $\mathcal{L}_1$; además, un vector unitario paralelo a esa recta es $v_3 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Necesitamos encontrar otros dos vectores de manera que podamos formar una base ortonormal $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Un vector ortogonal a $(2,2,2)$ es $(1,-1,0)$. Si lo hacemos unitario tendremos $v_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$. Utilizaremos el producto cruz para obtener nuestro último vector:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right),$$ y como ya es unitario, definimos $v_1 := \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

Entonces nuestra transformación de coordenadas se puede representar matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ donde la matriz es ortogonal por construcción.

Mendoza Luna Luis Guillermo.

Despejaremos $(x' \; y' \; z')^T$ con ayuda de la matriz inversa.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

pues el producto de matrices se distribuye sobre la suma de éstas.

Sustituyendo estas ecuaciones de transformación de coordenadas en la ecuación del cono:

$$(x')^2 + (y')^2 = (z')^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}y^2 + \frac{2}{3}z^2 + \frac{1}{3}xy - \frac{2}{3}yz - \frac{2}{3}xz + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{3}z^2$$
$$- 2x - 2y - 2z + \frac{2}{3}xz + \frac{2}{3}xy + \frac{2}{3}yz + 3.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{3}z^2 + 2x + 2y + 2z - \frac{4}{3}xy - \frac{4}{3}yz - \frac{4}{3}xz - 3 = 0.$$

es la ecuación buscada.