Geometría Analítica II Trabajo 12

Juan Salvador Garza Ledesma

De la ecuación de los conos circulares rectos que tienen como eje la recta

$\mathcal{L}: \vec{p} = t(2,2,2)\ t \in \mathbb{R}$ y vértice en $(1,1,1) := V$

Por la ecuación de un cono circular recto es muy sencillo si tomamos como eje del cono alguno de los ejes coordenados y al origen como vértice, así que una forma de hacer lo pedido es 'hacerse *m♡!' y hacer una transformación correcta.

Por ejemplo tomemos $V=(1,1,1)$ como origen, tomamos como eje z' a la recta $\mathcal{L}$ y construyamos dos vectores ortonormales que se intersequen en V para que hagan las veces de ejes X e Y.

Como $\mathcal{L}$ pasa por $(0,0,0)$, el vector $\bar{r}' := (1,1,1)$ está sobre $\mathcal{L}$, hagamos $\bar{s}'=(0,-1,1)$, por ser $\bar{r}'\cdot\bar{s}'=0$ $\bar{r}'\perp\bar{s}'$, haciendo $\bar{r}'\times\bar{s}'=\bar{t}'$ obtendremos un $\bar{t}'$ $\ni$ $\bar{t}'\perp\bar{s}' \wedge \bar{t}'\perp\bar{r}'$.

$$\bar{t}' = \bar{r}'\times\bar{s}' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2,-1,-1),$$ para hacer más cómodo

nuestro nuevo sistema normalicemos los vectores $\bar{s}'$, $\bar{r}'$ y $\bar{t}'$ obteniendo:

$$\bar{r} = \frac{1}{\|\bar{r}'\|}\bar{r}' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right); \quad \bar{s} = \frac{1}{\|\bar{s}'\|}\bar{s}' = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$\bar{t} = \frac{1}{\|\bar{t}'\|}\bar{t}' = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right);$$ $\forall P \in \mathbb{R}^3$, $P=(x,y,z)$,

queremos hacer

$$\vec{VP} = x'\bar{r} + y'\bar{s} + z'\bar{t} \quad \text{i.e.}$$

$$P-V = x'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + y'\left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + z'\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$$

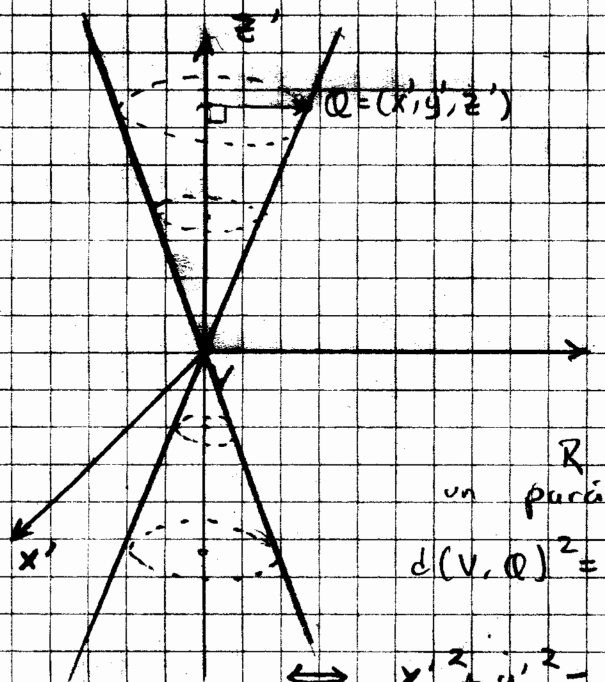
$$\Leftrightarrow (x-1, y-1, z-1) = x'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + y'\left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + z'\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right).$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ dado que la matriz que construimos es ortogonal tenemos:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^{-1} = [\vec{r}\,|\,\vec{s}\,|\,\vec{t}\,]^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \text{de aquí!}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dots (*)$$

Ahora sí construymos los conos en $V - x', y' z'$!



Usando el Teorema de Pitágoras tenemos

$$d(V,Q)^2 = R^2 + z'^2$$

donde Q es cualquier punto en el cono y R es el radio variable de las circunferencias que se obtienen de la intersección del cono con un plano paralelo al plano $x'y'$, podemos hacer que R varíe proporcionalmente con z' y dar un parámetro k tal que $R = kz'$ y obtener

$$d(V,Q)^2 = k^2z'^2 + z'^2 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 = k^2z'^2 + z'^2$$

$\Leftrightarrow x'^2 + y'^2 = k^2z'^2$, aplicando (*) resulta

que $x' = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z) - 1$; $y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(z-y) - 1$; $z' = \frac{1}{\sqrt{6}}(2x-y-z) - 1$

$$\Rightarrow x'^2 + y'^2 = k^2 z'^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)-1\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(z-y)-1\right)^2 = k^2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(2x-y-z)-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(x+y+z)^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}(x+y+z) + 1 + \frac{1}{2}(z-y)^2 - \sqrt{2}(z-y) + 1 = k^2\Big(\frac{1}{6}(2x-y-z)^2 - \frac{2}{\sqrt{6}}($$
$$(2x-y-z)+1\Big) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{6}\Big[(2-4k^2)x^2 + (5-k^2)y^2 + (5-k^2)z^2 + (6+4k^2)xy + (6+4k^2)xz +$$
$$-(2k^2+4)yz + 4(\sqrt{6}k^2 - \sqrt{3})x + 2(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{6}k^2)y - 2(\sqrt{6}k^2 + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})z\Big] +$$
$$+ 2 - k^2 = 0 \dots$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned}&2(1-2k^2)x^2+(5-k^2)(y^2+z^2)+2(3+2k^2)(xy+xz)-2(k^2+2)yz+\\&+2\left[2(\sqrt{6}k^2-\sqrt{3})x+(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{6}k^2)y-(\sqrt{6}k^2+2\sqrt{3}+3\sqrt{2})z+6-3k^2\right]=0\end{aligned}}$$

Que es una familia de conos con parámetro libre k, dos elementos de esta familia se ven más o menos: