Geometría Analítica 2

Mendoza Luna Luis Guillermo. TRABAJO

Ejercicios pág. 73

1. Transforma la ecuación $x^2 - 3yz + y^2 - 6x + z = 0$ a un nuevo sistema de coordenadas cuyos ejes son paralelos a los ejes canónicos y cuyo origen es $(1, -1, 2)$.

Las ecuaciones que definen la traslación son:

$x = x' + 1$, $y = y' - 1$ $z = z' + 2$. Sustituyendo en la ecuación dada:

$$(x'+1)^2 - 3(y'-1)(z'+2) + (y'-1)^2 - 6(x'+1) + z' + 2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow (x')^2 + (y')^2 - 3y'z' - 4x' - 8y' + 4z' + 4 = 0$$

obtenemos la ecuación en un sistema de ejes paralelos a los canónicos.

2. Por medio de las ecuaciones (2) demuestra que la expresión $x^2 + y^2 + z^2$ es invariante ante la rotación de ejes. Interpreta geométricamente.

Tenemos que $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_3$ son tres rectas concurrentes en el origen y que sus cosenos directores son $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; μ_1, μ_2, μ_3; ν_1, ν_2, ν_3, respectivamente.

Las ecuaciones que definen la transformación de coordenadas de la rotación son

$$x = \lambda_1 x' + \lambda_2 y' + \lambda_3 z', \quad y = \mu_1 x' + \mu_2 y' + \mu_3 z', \quad z = \nu_1 x' + \nu_2 y' + \nu_3 z'$$

Sustituyendo en la expresión:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (\lambda_1 x' + \lambda_2 y' + \lambda_3 z')^2 + (\mu_1 x' + \mu_2 y' + \mu_3 z')^2 + (\nu_1 x' + \nu_2 y' + \nu_3 z')^2$$

$$= \lambda_1^2 (x')^2 + \lambda_2^2 (y')^2 + \lambda_3^2 (z')^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 x'y' + 2\lambda_2 \lambda_3 y'z' + 2\lambda_1 \lambda_3 x'z'$$

$$+ \mu_1^2 (x')^2 + \mu_2^2 (y')^2 + \mu_3^2 (z')^2 + 2\mu_1 \mu_2 x'y' + 2\mu_2 \mu_3 y'z' + 2\mu_1 \mu_3 x'z'$$

$$+ \nu_1^2 (x')^2 + \nu_2^2 (y')^2 + \nu_3^2 (z')^2 + 2\nu_1 \nu_2 x'y' + 2\nu_2 \nu_3 y'z' + 2\nu_1 \nu_3 x'z'$$

$$= (\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2)(x')^2 + (\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2)(y')^2 + (\lambda_3^2 + \mu_3^2 + \nu_3^2)(z')^2$$

$$+ 2x'y'(\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2) + 2y'z'(\lambda_2 \lambda_3 + \mu_2 \mu_3 + \nu_2 \nu_3) + 2x'z'(\lambda_1 \lambda_3 + \mu_1 \mu_3 + \nu_1 \nu_3)$$

$$= (x')^2 + (y')^2 + (z')^2$$ pues estamos tomando ejes ortogonales.

Podemos interpretar esto geométricamente diciendo que la esfera tiene una infinidad de ejes de simetría.

3. Muestra que las líneas $x=\frac{y}{4}=\frac{z}{2}$, $\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=z$, $\frac{x}{2}=y=\frac{z}{-3}$ son ortogonales dos a dos. Escribe las ecuaciones de una transformación de coordenadas en donde dichas líneas sean los ejes.

Los vectores de dirección de las rectas anteriores son $(1,4,2)$, $(2,-1,1)$, $(2,1,-3)$. Veremos que dichas rectas son ortogonales comprobando que sus vectores de dirección lo son:

$$(1,4,2)\cdot(2,-1,1)=2-4+2=0 \qquad (1,4,2)\cdot(2,1,-3)=(2+4-6)=0$$

$$(2,-1,1)\cdot(2,1,-3)=4-1-3=0$$

También vemos que las rectas concurren en el origen. Entonces, un sistema de ecuaciones que rotan los ejes coordenados es:

$$x=x'+2y'+2z' \quad y=4x'-y'+z', \quad z=2x'+y'-3z'.$$

que en forma vectorial es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x'\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z'\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

4. Traslada los ejes de tal manera que la ecuación $x^2-2y^2+6z^2-16x-4y-24z+37=0$ carezca de término de primer grado.

Designemos por (h,k,l) al origen de nuestro nuevo sistema coordenado. Entonces $x=x'+h$, $y=y'+k$, $z=z'+l$, que sustituyendo en la ecuación original nos da:

$$x^2-2y^2+6z^2-16x-4y-24z+37=0 \iff (x'+h)^2-2(y'+k)^2+6(z'+l)^2$$
$$-16(x'+h)-4(y'+k)-24(z'+l)+37=0$$
$$\iff (x')^2-2(y')^2+6z'^2+(2h-16)x'+(-4k-4)y'+(-24+12l)z'$$
$$+h^2-2k^2+6l^2-16h-4k+37-24l=0.$$

Entonces, tenemos que (h,k,l) deben ser tales que:

Mendoza Luna Luis Guillermo

$$2h-16=0 \qquad\qquad h=8$$
$$-4k-4=0 \quad \Longleftrightarrow \quad k=-1$$
$$-24+12l=0 \qquad\qquad l=2$$

∴ la traslación buscada es $x=x'+8$, $y=y'-1$, $z=z'+2$

Transformando la ecuación obtenemos:

$$x^2-2y^2+6z^2-16x-4y-24z+37=0$$
$$\Longleftrightarrow (x'+8)^2-2(y'-1)^2+6(z'+2)^2-16(x'+8)-4(y'-1)-24(z'+2)+37=0$$
$$\Longleftrightarrow (x')^2-2(y')^2+6(z')^2+(16-16)x'+(4-4)y'+(24-24)z'+(64-2+24-128+4-48+37)=0$$
$$\Longleftrightarrow (x')^2-2(y')^2+6(z')^2+(-49)=0$$

5. Muestra que la ecuación $ax+by+cz+s=0$ puede ser reducida a una expresión de la forma $x=0$ por medio de una transformación de coordenadas.

Como en el sistema de ejes canónicos nuestra ecuación es $ax+by+cz+s=0$ y queremos que $x'=0$, deseamos que en el sistema $O'-X'Y'Z'$ el plano represente el plano $Y'Z'$. Conseguiremos esto si el vector normal al plano (a,b,c) genera el eje X'. Por otro lado, el plano en el nuevo sistema pasará por el origen O', el cual será un punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$. Ahora necesitamos encontrar dos vectores ortogonales a (a,b,c); uno de ellos es $(b,-a,0)$ y utilizaremos al producto vectorial para generar al tercero.

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & c \\ b & -a & 0 \end{vmatrix} = (ac, bc, -a^2-b^2)$$

∘b La transformación de coordenadas buscada es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + x'\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} + z'\begin{pmatrix} ac \\ bc \\ -a^2-b^2 \end{pmatrix} \quad \text{donde } ax_0+by_0+cz_0+s=0$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la ecuación que define el plano:

$ax+by+cz+s=0$

$$\Leftrightarrow a(x_0+ax'+by'+acz')+b(y_0+bx'-ay'+bcz')+c(z_0+x'c-a^2z'-b^2z')+s=0$$

$$\Leftrightarrow x'(a^2+b^2+c^2)+y'(ab-ba)+z'(a^2c+b^2c-a^2c-b^2c)+(ax_0+by_0+cz_0+s)=0$$

$$\Leftrightarrow x'(a^2+b^2+c^2)=0$$

$\Leftrightarrow x'=0$ puesto que $a^2+b^2+c^2>0$ (para que el plano exista.

∘ Cualquier plano $ax+by+cz+s=0$ puede ser transformado en otro de la forma $x'=0$ mediante la transformación de coordenadas arriba dada.

6. Encuentra la ecuación del lugar $11x^2+10y^2+6z^2-8yz+4xz-12xy-12=0$ cuando se toman como nuevos ejes coordenados las rectas cuyos cosenos directores son $1/3,\ 2/3,\ 2/3;\ 2/3,\ 1/3,\ -2/3;\ -2/3,\ 2/3,\ -1/3$ y que se encuentran todas en el origen.

Puesto que tenemos los vectores directores de las rectas que definen los nuevos ejes, podemos escribir directamente las ecuaciones que definen la transformación de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\frac{x'}{3} + \frac{y'}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{z'}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación de nuestro lugar geométrico:

$11x^2+10y^2+6z^2-8yz+4xz-12xy-12=0$

$$\Leftrightarrow 11\left(\tfrac{1}{3}\right)^2(x'+2y'-2z')^2+10\left(\tfrac{1}{3}\right)^2(2x'+y'+2z')^2+6(1/3)^2(2x'-2y'-z')^2-8(1/3)^2(2x'+y'+2z')\cdot$$

$$\cdot(2x'-2y'-z')+4(1/3)^2(x'+2y'-2z')(2x'-2y'-z')-12\left(\tfrac{1}{3}\right)^2(x'+2y'-2z')(2x'+y'+2z')-12=0$$

Mendoza Luna Luis Guillermo.

$\Longleftrightarrow 27(x')^2 + 22(y')^2 + 162(z')^2 + 76 x'y' - 16y'z' - 108 = 0$

(se anula el término en $x'z'$).

7. Supongamos que $O\text{-}X'Y'Z'$ puede obtenerse de $O\text{-}XYZ$ por medio de una rotación y que OY puede hacerse coincidir con OX por medio de un giro de $90°$ en contra de las manecillas del reloj visto desde el lado positivo del eje Z. Demuestra que OY' puede hacerse coincidir con OX' rotando $90°$ contra las manecillas del reloj visto desde el eje Z'.

Por hipótesis, existe una rotación $R: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que transforma los ejes XYZ en los ejes $X'Y'Z'$. También existe una rotación $A: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que hace coincidir el eje OY con el eje OX de acuerdo con las hipótesis del problema.

Para fijar ideas, si la matriz de rotación R es:

$R := \left(R(\overline{e_1}) \quad R(\overline{e_2}) \quad R(\overline{e_3}) \right)$, entonces la matriz A se expresa como

$A := \left(-R(\overline{e_2}) \quad R(\overline{e_1}) \quad R(\overline{e_3}) \right)$. Por la construcción de nuestras funciones:

$A(\overline{e_1}) = -R(\overline{e_2}), \quad A(\overline{e_2}) = R(\overline{e_1}), \quad A(\overline{e_3}) = R(\overline{e_3}) \qquad (*)$

Estamos buscando una matriz - función R' que haga coincidir el eje OY' con el eje OX'. Esto significa que

$$R' \circ R(\overline{e_1}) = -R(\overline{e_2})$$

$$R' \circ R(\overline{e_2}) = R(\overline{e_1}) \qquad (**)$$

$$R' \circ R(\overline{e_3}) = R(\overline{e_3})$$

Citaremos un resultado acerca de las transformaciones lineales:

- Sean $M, L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales. Entonces $M = L \Longleftrightarrow M(\overline{e_i}) = L(\overline{e_i})$ para $i = 1, 2, 3$, donde $\overline{e_i}$ son los vectores canónicos.

Dem. La implicación $\Rightarrow]$ es trivial.

$\Leftarrow]$ Si $\overline{x} \in \mathbb{R}^3$, $M(\overline{x}) = M\left(\sum x_i \overline{e_i}\right) = \sum x_i M(e_i) = \sum x_i L(e_i) = L\left(\sum x_i \overline{e_i}\right) = L(\overline{x})$.

De este resultado, $R'R = A \Rightarrow R' = AR^{-1} \Rightarrow R' = AR^T$

puesto que R es una matriz ortogonal ya que estamos considerando que