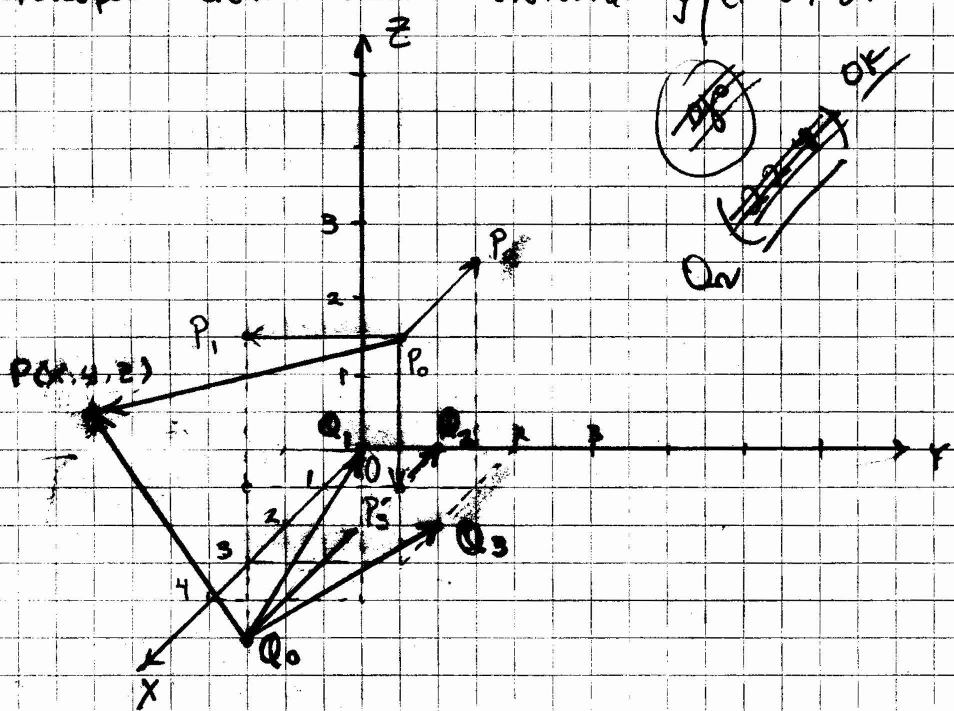
Geometría Analítica II

"[redacted]jo 10"

Juan Salvador Garza Ledesma

7/mar/2005

Considere el sistema determinado en el espacio por los puntos $\{P_0(1,1,2), P_1(1,-1,2), P_2(1,2,3), P_3(3,2,1)\}$ y el sistema $\{Q_0(3,0,-1), Q_1(4,2,2), Q_2(2,2,1), Q_3(0,1,-1)\}$. Obtenga la transformación entre un sistema y el otro.



Empecemos por averiguar cómo se ven los puntos del espacio dados en coordenadas referentes a los sistemas $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ y $\{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$ con puntos de origen P_0 y Q_0 respectivamente en el sistema canónico, con vectores $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ y punto de origen $(0,0,0)$, es decir, queremos tener expresiones de la forma:

$$\overrightarrow{P_0P} = \alpha_1 \overrightarrow{P_0P_1} + \alpha_2 \overrightarrow{P_0P_2} + \alpha_3 \overrightarrow{P_0P_3}$$

¡bien!

$$\overrightarrow{Q_0P} = \beta_1 \overrightarrow{Q_0Q_1} + \beta_2 \overrightarrow{Q_0Q_2} + \beta_3 \overrightarrow{Q_0Q_3}$$

Donde $P = (x,y,z)$ está referido al sistema canónico con origen $(0,0,0)$ y vectores de referencia $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$.

Tenemos: $\vec{P_0P} = (x,y,z) - (1,1,2) = (x-1, y-1, z-2)$

$\vec{P_0P_1} = (1,-1,2) - (1,1,2) = (0,-2,0)$

$\vec{P_0P_2} = (1,2,3) - (1,1,2) = (0,1,1)$

$\vec{P_0P_3} = (3,2,1) - (1,1,2) = (2,1,-1)$

y para Q_0, Q_1, Q_2, Q_3:

$\vec{Q_0P} = (x,y,z) - (3,0,-1) = (x-3, y, z+1)$

$\vec{Q_0Q_1} = (4,2,2) - (3,0,-1) = (1,2,3)$

$\vec{Q_0Q_2} = (2,2,1) - (3,0,-1) = (-1,2,2)$

$\vec{Q_0Q_3} = (0,1,-1) - (3,0,-1) = (-3,1,0)$

De donde

$$\vec{P_0P} = (x-1, y-1, z-2) = \alpha_1(0,-2,0) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(2,1,-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ o en forma escalar:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\alpha_3 + 1 \\ y &= -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1 \\ z &= \alpha_2 - \alpha_3 + 2 \end{aligned}\right\} \cdots (\mathrm{I})$$

y análogamente

$$\vec{Q_0P} = (x-3, y, z+1) = \beta_1(1,2,3) + \beta_2(-1,2,2) + \beta_3(-3,1,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$ o bien:

$$\left.\begin{aligned} x &= \beta_1 - \beta_2 - 3\beta_3 + 3 \\ y &= 2\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 \\ z &= 3\beta_1 + 2\beta_2 - 1 \end{aligned}\right\} \cdots (\mathrm{II})$$

Combinando (I) y (II) podemos obtener fácilmente las transformaciones que se piden.

Obtengamos primero la transformación del sistema $\{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$ al sistema $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$.

Igualando x en (I) y (II) resulta:

$$2\alpha_3 + 1 = \beta_1 - \beta_2 - 3\beta_3 + 3 \Leftrightarrow \alpha_3 = \tfrac{1}{2}\beta_1 - \tfrac{1}{2}\beta_2 - \tfrac{3}{2}\beta_3 + 1$$

Igualando las expresiones para z de (I) y (II) y usando lo obtenido previamente se tiene que:

$$\alpha_2 - \left(\tfrac{1}{2}\beta_1 - \tfrac{1}{2}\beta_2 - \tfrac{3}{2}\beta_3 + 1\right) + 2 = 3\beta_1 + 2\beta_2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_2 = \left(3 + \tfrac{1}{2}\right)\beta_1 + \left(2 - \tfrac{1}{2}\right)\beta_2 - \tfrac{3}{2}\beta_3 - 2 = \tfrac{7}{2}\beta_1 + \tfrac{3}{2}\beta_2 - \tfrac{3}{2}\beta_3 - 2$$

Finalmente usando estos 2 resultados y las expresiones que se obtuvieron para y se tiene:

$$2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - 1 = -2\beta_1 - 2\beta_2 - \beta_3 \Leftrightarrow \alpha_1 = \tfrac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3) - \beta_1 - \beta_2 - \tfrac{1}{2}\beta_3 + \tfrac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{7}{2}\beta_1 + \tfrac{3}{2}\beta_2 - \tfrac{3}{2}\beta_3 - 2 + \tfrac{1}{2}\beta_1 - \tfrac{1}{2}\beta_2 - \tfrac{3}{2}\beta_3 + 1\right) - \beta_1 - \beta_2 - \tfrac{1}{2}\beta_3 + \tfrac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \tfrac{1}{2}(4\beta_1 + \beta_2 - 3\beta_3 - 1) - \beta_1 - \beta_2 - \tfrac{1}{2}\beta_3 + \tfrac{1}{2} = \beta_1 - \tfrac{1}{2}\beta_2 - 2\beta_3$$

$$\therefore \quad \alpha_1 = \beta_1 - \tfrac{1}{2}\beta_2 - 2\beta_3$$

$$\alpha_2 = \tfrac{7}{2}\beta_1 + \tfrac{3}{2}\beta_2 - \tfrac{3}{2}\beta_3 - 2$$

$$\alpha_3 = \tfrac{1}{2}\beta_1 - \tfrac{1}{2}\beta_2 - \tfrac{3}{2}\beta_3 + 1$$

o bien:

$$\boxed{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}}$$

Que son la transformación del sistema de referencia $\{Q_i\}$ al sistema $\{P_i\}$ $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Hagamos finalmente algo similar para obtener β_1, β_2 y β_3 en términos de α_1, α_2 y α_3.

Hace un rato se tuvo la suerte de que en la primer ecuación de (I) apareciera únicamente α_3 en el lado derecho. Quizá ahora sea más conveniente ver a (II') como un sistema en β_1, β_2 y β_3, resolverlo para luego usar (I):

Tenemos

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 - \beta_2 - 3\beta_3 &= x-3 \\ 2\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 &= y \\ 3\beta_1 + 2\beta_2 &= z+1 \end{aligned}\right\} \cdots (\mathrm{II}')$$

Para ahorrar grafito asociémosle a II' la matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & x-3 \\ 2 & 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & 0 & z+1 \end{array}\right) =: A$ y hagamos las transformaciones necesarias

$$A \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & x-3 \\ 0 & 4 & 7 & -2x+y+6 \\ 0 & 5 & 9 & -3x+z+10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & x-3 \\ 0 & 20 & 35 & -10x+5y+30 \\ 0 & -20 & -36 & 12x-4z-40 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & x-3 \\ 0 & 4 & 7 & -2x+y+6 \\ 0 & 0 & -1 & 2x+5y-4z-10 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \quad -\beta_3 = -2x - 5y + 4z + 10$, usando (I):

$\beta_3 = -2(2\alpha_3+1) - 5(-2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+1) + 4(\alpha_2-\alpha_3+2) + 10$

$\Leftrightarrow \beta_3 = 10\alpha_1 - \alpha_2 - 13\alpha_3 + 1$

$\Rightarrow \quad 4\beta_2 = -2(2\alpha_3+1) + (-2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+1) - 7(10\alpha_1-\alpha_2-13\alpha_3+1) + 6$

$\Leftrightarrow 4\beta_2 = -72\alpha_1 + 8\alpha_2 + 88\alpha_3 - 2 \Leftrightarrow \beta_2 = -18\alpha_1 + 2\alpha_2 + 22\alpha_3 - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \beta_1 = 2\alpha_3 - 2 - 18\alpha_1 + 2\alpha_2 + 22\alpha_3 - \frac{1}{2} + 30\alpha_1 - 3\alpha_2 - 39\alpha_3 + 3$

$\Leftrightarrow \beta_1 = 12\alpha_1 - \alpha_2 - 15\alpha_3 + \frac{1}{2}$

$$\therefore \boxed{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 & -15 \\ -18 & 2 & 22 \\ 10 & -1 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Que es la transformación que faltaba, del sistema $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ al $\{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$.