Capítulo 1

Un paseo por $\mathbb{R}^2$

1.1 Distancia y área

Una herramienta muy importante en la descripción de lugares geométricos, es la distancia entre dos puntos.

Problema 1 Dado dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ en el plano $\mathbb{R}^2$, estamos interesados en la distancia entre ellos

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \|P - Q\| \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

Observación 1 Esta relación involucra el Teorema de Pitágoras, un resultado sobre áreas que usamos para calcular longitudes.

Otro problema de gran interés es el poder calcular y hacer uso del área de un triángulo.

Problema 2 Dado tres puntos P, Q y R que definen un triángulo, siguiendo la fórmula de Herón, tenemos

$$\text{área}(\triangle(P,Q,R)) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde a, b y c son las longitudes de los lados del triángulo y s es la seminuma entre ellos.

Otra representación para el área es la siguiente:

Problema 3 Dado tres puntos $P(x_p, y_p)$, $Q(x_q, y_q)$ y $R(x_r, y_r)$ que definen un triángulo, el área del triángulo esta dado por

$$\text{área}(\triangle(P,Q,R)) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \\ x_r & y_r & 1 \end{vmatrix}$$

Trabajo 1 Demostrar la relación anterior para el área de un triángulo, por dos caminos distintos.

Un importante resultado a partir de esta relación es la siguiente:

Observación 2 Tres puntos $P(x_p, y_p)$, $Q(x_q, y_q)$ y $R(x_r, y_r)$ son **colineales**, si

$$\begin{vmatrix} x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \\ x_r & y_r & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Con ello, si el punto $P(x, y)$ es arbitrario y colineal a Q y R, podemos obtener una relación para la recta que pasa por Q y R:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_q & y_q & 1 \\ x_r & y_r & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Otra de las entidades que nos interesa es la proporción entre segmentos.

Trabajo 2 Considere el segmento $\overline{AB}$, donde $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$. Si P se encuentra en el segmento y es tal que

$$r = \frac{AP}{PB} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Demuestre que las coordenadas de $P(x, y)$ son

$$P\left(\frac{\mu x_a + \lambda x_b}{\mu + \lambda}, \frac{\mu y_a + \lambda y_b}{\mu + \lambda}\right)$$

Esta expresión se conoce como la representación Baricéntrica de P en la recta.

Otra forma de expresar esa relación en forma vectorial es

$$\begin{aligned}
\vec{OP} &= \frac{\mu\vec{OA} + \lambda\vec{OB}}{\mu + \lambda]} \\
&= \frac{\mu}{\mu + \lambda}\vec{OA} + \frac{\lambda}{\mu + \lambda}\vec{OB} \\
&= (1 - t)\vec{OA} + t\vec{OB}; \qquad \text{donde} \quad t = \lambda/(\mu + \lambda)
\end{aligned}$$

Para t, esta relación la conocemos como la representación paramétrica de la recta.

Ahora bien, si desarrolllamos la relación

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_q & y_q & 1 \\ x_r & y_r & 1 \end{vmatrix} = 0$$

esto nos conduce a una expresión de la forma

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Observación 3 La terna (α, β, γ) que define a la recta no es única.

1.2 Familia de rectas

Problema 4 Consideremos 2 rectas, digamos

$$\begin{aligned} 3x - y + 4 &= 0 \\ x - y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

si estas dos rectas se cortan, entonces, para cualesquiera R_1 y R_2 distintos de cero

$$R_1(3x - y + 4) + R_2(x - y - 2) = 0$$

Tenemos una representación para una recta que pasa por el punto de intersección. En forma general escribimos

$$R_1\mathcal{L}_1 + R_2\mathcal{L}_2 = 0$$

Trabajo 3 Se cuenta con tres rectas, a saber $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_3$ de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 : &\qquad \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \\ \mathcal{L}_2 : &\qquad \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0 \\ \mathcal{L}_3 : &\qquad \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 = 0 \end{aligned}$$

¿Cuál es la condición, en término de los coeficientes α, β γ, para que estas rectas sean concurrentes?

El problema anterior, se puede atacar por dos caminos, uno el considerar el punto de intersección entre las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ y sustituir en $\mathcal{L}_3$, para lograr una relación entre los coeficientes de las rectas. La otra forma, es considerar las familias de rectas que pasan por el punto de intersección entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ y observar a $\mathcal{L}_3$ como miembro de esa familia, esto es

$$\mathcal{L}_3 = k_1\mathcal{L}_1 + k_2\mathcal{L}_2$$

Lo que nos conduce a que el determinante del sistema sea cero

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_3 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

Veamos cómo justificarlo.

Si observamos al sistema de las tres ecuaciones, consideremos como miembro de

$$\begin{aligned} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z &= 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z &= 0 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z &= 0 \end{aligned}$$

Si el det del sistema es distinto de cero, tendremos solución única, que para este caso, el caso de un sistema homogéno, obtendríamos que $x = y = z = 0$. Pero no es así(fijando $z = 1$), por ello, obtenemos una infinidad.

Otra forma de observar esta propiedad, es considerar los coeficientes como vectores en $\mathbb{R}^3$, la relación del determinante cero nos implica que el volúmen que determinan es cero y por consiguiente se intersectan en un sólo punto (suponiendo que no son paralelos).

Esta idea de ligar los coeficientes al espacio u observar una componente dentro de otro espacio, se relaciona con el principio de dualidad, que podemos plantearlo a través de una tranformación

$$(x, y) \mapsto (x, y, z)$$

o bien,

$$(x, y, z) \mapsto (x/z, y/z)$$

Ejercicio 1 Dada la recta

$$x + \beta y + \gamma = 0$$

¿Qué familia de rectas no se encuentra representada?

Problema 5 Dada una recta

$$\mathcal{L} : \ \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

y dos puntos $P(x_p, y_p)$ y $Q(x_q, y_q)$, cómo podemos calcular el punto de intersección de $\mathcal{L}$ y la recta que pasa por P y Q.

Por una parte, recordemos que si R se encuentra sobre la recta que determinan P y Q, tenemos que

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{\lambda}{\mu}$$

con esto

$$R = \left(\frac{\mu x_p + \lambda x_q}{\mu + \lambda}, \frac{\mu y_p + \lambda y_q}{\mu + \lambda} \right)$$

Si R es punto de intersección, $R \in \mathcal{L}$ para lo cual, podemos encontrar una expresión para μ y λ

$$\alpha \left(\frac{\mu x_p + \lambda x_q}{\mu + \lambda} \right) + \beta \left(\frac{\mu y_p + \lambda y_q}{\mu + \lambda} \right) + \gamma = 0$$

o bien escribirlo como

$$\alpha(\mu x_p + \lambda x_q) + \beta(\mu y_p + \lambda y_q) + \gamma(\mu + \lambda) = 0$$

agrupando en términos de μ y λ

$$\begin{aligned} \mu(\alpha x_p + \beta y_p + \gamma) + \lambda(\alpha x_q + \beta y_q + \gamma) &= 0 \\ &= \mu \mathcal{L}(P) + \lambda \mathcal{L}(Q) = 0 \end{aligned}$$

de donde se desprende que

$$\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{\mathcal{L}(P)}{\mathcal{L}(Q)}$$

Observación 4 .
Si $\lambda/\mu < 0$; R se encuentra fuera del segmento.
Si $\lambda/\mu > 0$; R se encuentra dentro del segmento.

Trabajo 4 Considere el triángulo determinado por los puntos $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ y $C(x_c, y_c)$. Demuestre que las alturas del triángulo son concurrentes.

Sugerencia: Use adecuadamente la condición de concurrencia vista en el trabajo previo.

Problema 6 Dado un punto $C(x_c, y_c)$ dentro de una circunferencia de radio r, una ecuación para esta esta circunferencia es

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

lo que nos lleva a que

$$x^2 + y^2 - 2xx_c - 2yy_c + x_c^2 + y_c^2 - r^2 = 0$$

pero $x_c^2 + y_c^2 = d(C, \overline{0})$, con esto rescribimos lo anterior como

$$x^2 + y^2 - 2xx_c - 2yy_c + d(C, \overline{0}) - r^2 = 0$$

Pregunta: ¿Puede la ecuación

$$3x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 5y - 248 = 0$$

representar una circunferencia?

Una circunferencia tiene la forma

$$\alpha(x^2 + y^2) + \delta x + \epsilon y + \theta = 0$$

que puede ser reescrito como

$$x^2 + y^2 + \frac{\delta}{\alpha}x + \frac{\epsilon}{\alpha}y + \frac{\theta}{\alpha} = 0$$

donde δ/α y ϵ/α estan relacionados con la posición del centro y θ/α con el cuadrado del radio y la distancia del centro al origen.

Problema 7 Considremos la ecuación de la circunferencia de la forma

$$x^2 + y^2 = 1$$

consideremos la operación "producto derecha", esta ecuación la representamos como

$$x \cdot x + y \cdot y = 1$$

Si evaluamos el punto $(2, 3)$ por la derecha, obtenemos

$$x \cdot 2 + y \cdot 3 = 1$$

la cual es una recta que corta a la circunferencia, y si consideramos $(0, 1)$?

Trabajo 5 Si $P(x_p, y_p)$ es un punto sobre la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 1,$$

muestre que

$$x \cdot x_p + y \cdot y_p = 1$$

es la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto P.

Sugerencia: NO use cálculo.

Problema 8 Consideremos la ecuación de la circunferencia

$$\mathcal{S} = \{(x,y)| \quad x^2 + y^2 = 1\},$$

o en la forma

$$\mathcal{S} = \{(x,y)| \quad x \cdot x + y \cdot y = 1\},$$

y observemos para $P(x_p, y_p)$

$$\mathcal{S}_P = \{(x,y)| \quad x \cdot x_p + y \cdot y_p = 1\},$$

El problema, es identificar este conjunto. Veamos unos casos particulares, demosles valor a P.

Ejemplo numérico

Consideremos $P(2,1)$, para este punto obtenemos la recta

$$\mathcal{S}_P = \{(x,y)| \quad 2x + y - 1 = 0\},$$

La cual corta a la circunferencia en dos puntos Q y R

Figura 1.1: Circunferencia y $\mathcal{S}_P$.

Por una parte, tenemos que $Q(x_q, y_q)$ está en la intersección de $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}_P$, con esto

$$
\begin{aligned}
x_q \cdot x_q + y_q \cdot y_q - 1 &= 0 \qquad (1.1)\\
x_q \cdot x_p + y_q \cdot y_p - 1 &= 0 \qquad (1.2)
\end{aligned}
$$

Ahora bien, observemos $\mathcal{S}_Q$

$$\mathcal{S}_Q = \{(x,y)| \quad x \cdot x_q + y \cdot y_q - 1 = 0\},$$

de (1.2), se sigue que $P \in \mathcal{S}_Q$, de manera similar, tenemos que $P \in \mathcal{S}_R$, así $P \in \mathcal{S}_R \cap \mathcal{S}_Q$; y con esto $\mathcal{S}_P$ es la recta que pasa por PQ. De esta manera hemos caracterizado a $\mathcal{S}_Q$

Pregunta: Qué pasa si P está dentro del círculo, quién es

$$\mathcal{S}_P = \{(x,y)| \quad x \cdot x_p + y \cdot y_p - 1 = 0\},$$

De manera directa podemos descartar a $P(0,0)$. Tenemos que la recta queda fuera del círculo. Probemos para $P(1/2,0)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_P &= \{(x,y)| \quad x \cdot 1/2 + y \cdot 1 - 1 = 0\}\\
&= \{(x,y)| \quad x = 2\}
\end{aligned}
$$

en este caso obtenemos una recta fuera de la circunferencia. Ahora veamos para $P(1/2,1/2)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_P &= \{(x,y)| \quad x \cdot 1/2 + y \cdot 1/2 - 1 = 0\}\\
&= \{(x,y)| \quad x + y = 2\}
\end{aligned}
$$

Observación 5 Las rectas obtenidas son perpendiculares a la recta que parte del origen y pasa por P

$$x \cdot x_p + y \cdot y_p - 1 = 0$$

lo escribimos como

$$y = -\frac{x_p}{y_p} + \frac{1}{y_p}$$

pero la pendiente que pasa por 0 y P es $m' = y_p/x_p$

Observemos que, para el punto $(2, 0)$, tenemos

$$x \cdot x_p + y \cdot y_p - 1 = 0$$

obteniendo

$$x \cdot 2 + y \cdot 0 - 1 = 0$$

esto es $x = 1/2$.

Ahora consideremos el punto $P(1/2, 1/2)$, obteniendo

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_P &= \{(x,y)| \quad x \cdot \frac{1}{2} + y \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0\} \\ &= \{(x,y), | \quad x + y - 2 = 0\} \end{aligned}$$

La cual es una recta perpendicular a aquella que pasa por 0 y $(1/2, 1/2)$ y que corta a esta en $(1, 1)$.

Resumiendo, para $P \in \mathbb{R}^2$, el conjunto

$$\mathcal{S}_P = \{(x,y)| \quad x \cdot \frac{1}{2} + y \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$$

representa a

- Si P está fuera de la circunferencia, $\mathcal{S}_p$ es la recta que pasa por los puntos de tagencia de las tangentes trazadas desde P.
- SI P está en $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_P$ es la recta tangente a $\mathcal{S}$ en P.

- Si P está en el interior. $\mathcal{S}_P$ es la recta perpendicular al radio que pasa por P que pasa por el punto de intersección de $\mathcal{S}$ con la cuerda que tiene a P como punto medio.

Trabajo 6 Considere un punto $P(x_p, y_p)$ en $\mathbb{R}^2$, y

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

la ecuación de una elipse. Identifique

$$\mathcal{S}_p := \{(x, y)| \quad x \cdot x_p + 4y \cdot y_p - 4 = 0\}$$