Capítulo 1

Cambio de coordenadas

Problema 1 Tenemos 3 puntos P_1, P_2 y P_3, la idea es representar P en términos de esos puntos y de otros tres Q_1, Q_2 y Q_3.

El problema, es cómo ven $P_1P_2P_3$ a P y cómo $Q_1Q_2Q_3$ a P.

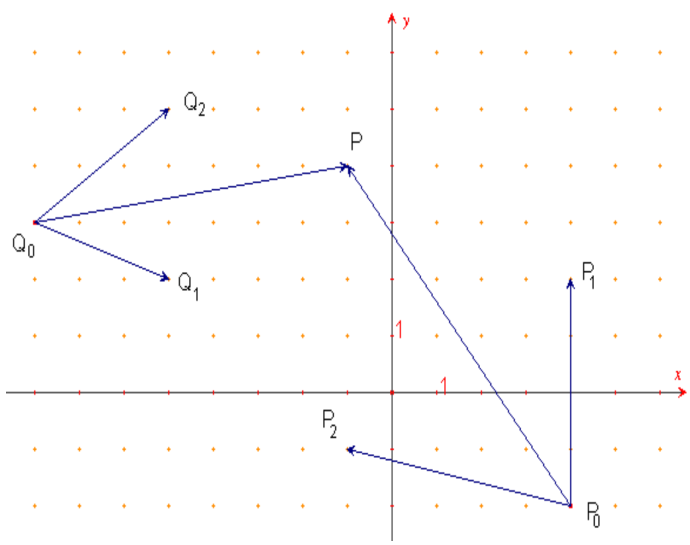


Figura 1.1: Dos sistemas de referencia para P.

Ejemplo 1 Consideremos los vectores $\vec{V_1} = (1, 0)$ y $\vec{V_2} = (0, 1)$, el vector $\vec{OP} = (x, y)$ lo escribimos como

$$
\begin{aligned}
\vec{OP} &= x\vec{V_0V_1} + y\vec{V_0V_2} \\
&= x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}
\end{aligned}
$$

Ahora consideremos tres puntos $P_0(0,-1)$, $P_1(2,0)$ y $P_2(-1,1)$. La idea es representar $\vec{P_0P}$ en términos de $\vec{P_0P_1}$ y $\vec{P_0P_2}$. Para lograrlo, observemos a $\vec{P_0P}$ como suma de vectores

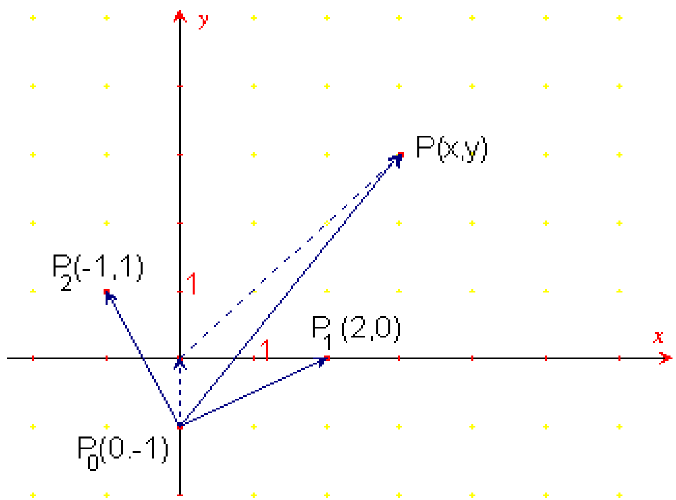


Figura 1.2: Un sistema de referencia para P.

$$
\begin{aligned}
\vec{P_0P} &= \vec{P_0O} + \vec{OP} \\
&= (0,1) + (x,y) \\
&= (x, y+1)
\end{aligned}
$$

el cual podemos expresarlo como combinación lineal entre $\vec{P_0P_1}$ y $\vec{P_0P_2}$

$$
\begin{aligned}
(x, y+1) &= \alpha\vec{P_0P_1} + \beta\vec{P_0P_2} \\
&= \alpha(2,1) + \beta(-1,2) \\
&= (2\alpha-\beta, \alpha+2\beta)
\end{aligned}
$$

con esto, logramos el sistema

$$
\begin{aligned}
x &= 2\alpha - \beta \\
y &= \alpha + 2\beta - 1
\end{aligned}
$$

Resolviendo para α y β tenemos

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 2/5x + 1/5y + 1/5 \\
\beta &= -1/5x + 2/5y + 2/5
\end{aligned}
$$

esto nos permite pasar de un sistema de coordenadas a otro de manera adecuada.

Ejemplo 2 Consideremos los puntos $P_0(0,-1)$, $P_1(2,0)$, $P_2(-1,1)$, y $Q_0(2,2)$, $Q_1(-1,4)$ y $Q_2(0,-3)$. Para la colección $\{P_1, P_2, P_3\}$ tenemos una representación para P, en $\{Q_0, Q_1, Q_2\}$ tenemos una representación para el mismo punto. La idea es observar una representación de un conjunto en otro.

De nueva cuenta, representamos $\vec{OP}$ como

$$
\begin{aligned}
Q_0\vec{}P &= Q_0\vec{}O + \vec{OP} \\
&= (-2,-2) + (x,y) \\
&= (x-2, y-2) \\
&= \alpha_1 Q_0\vec{}Q_1 + \beta_1 Q_0\vec{}Q_2 \\
&= \alpha_1(-3,2) + \beta_1(-2,-5) \\
&= (-3\alpha_1 - 2\beta_1, 2\alpha_1 - 5\beta_1)
\end{aligned}
$$

obteniendo el sistema

$$
\begin{aligned}
x &= -3\alpha_1 - 2\beta_1 + 2 \\
y &= 2\alpha_1 - 5\beta_1 + 2
\end{aligned}
$$

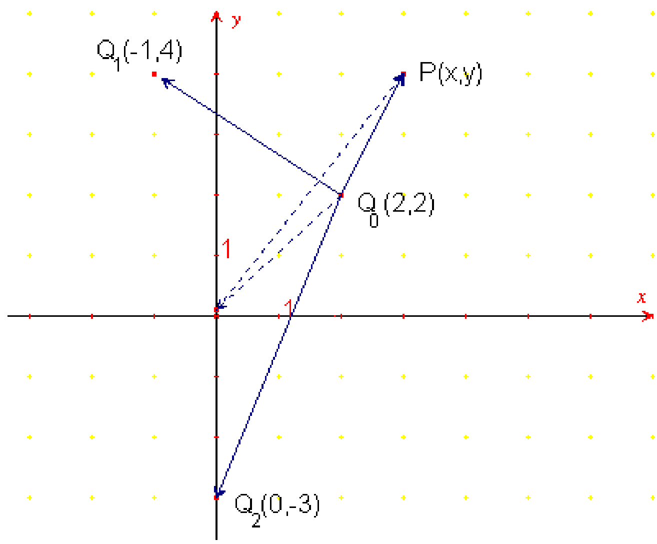


Figura 1.3: Un sistema de referencia para P.

Ahora, si observamos nuestra representación para P tenemos

$$
\begin{aligned}
\beta &= -1/5x + 2/5y + 2/5 \\
\alpha &= 2/5x + 1/5y + 1/5
\end{aligned}
$$

tendremos una representación de nuestro sistema entre las $P's$ y las $Q's$

$$
\begin{aligned}
\beta &= -1/5(3\alpha_1 - 2\beta_1 + 2) + 2/5(2\alpha_1 - 5\beta_1 + 2) + 2/5 \\
\alpha &= 2/5(-3\alpha_1 - 2\beta_1 + 2) + 1/5(2\alpha_1 - 5\beta_1 + 2) + 1/5
\end{aligned}
$$

así

$$
\begin{aligned}
\beta &= 7/5\alpha_1 - 8/5\beta_1 + 4/5 \\
\alpha &= -4/5\alpha_1 - 9/5\beta_1 + 7/5
\end{aligned}
$$

El cual podemos resolver para α_1 y β_1 y pasar de un sistema de referencia a otro.

Trabajo 1 .

1. Obtenga el sistema de referencia para α_1 y β_1.
2. Considere el sistema determinado por los puntos $\{P_0(0,1), P_1(1,0), P_2(1,3)\}$ y el sistema $\{Q_0(3,0), Q_1(2,1), Q_2(5,0)\}$, obtenga la transformación entre un sistema y el otro.

Lo que hemos estado haciendo, es observar un sistema en términos de otro. Partimos de expresar un vector en términos de otros dos y entonces observar el punto dentro del sistema de referencia generado por esos dos vectores.

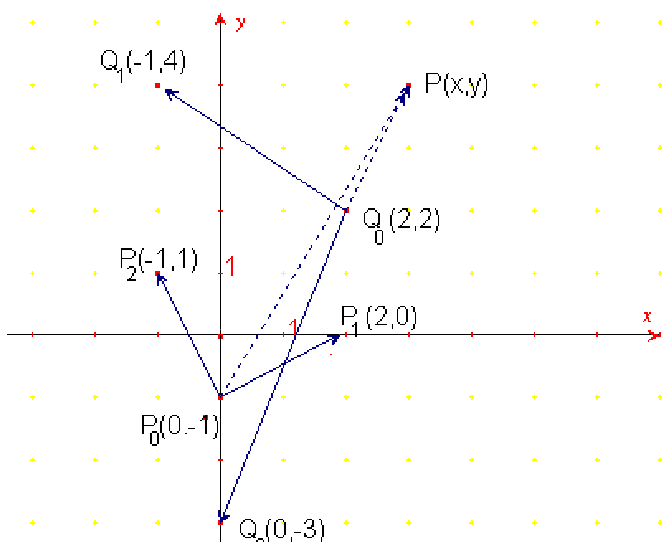


Figura 1.4: Dos sistemas de referencia

El vector $\vec{OP}$ se puede expresar en términos de $\vec{P_0P_1}$ y $\vec{P_0P_2}$ como

$$\vec{P_0P} = \alpha(P_1 - P_0) + \beta(P_2 - P_0)$$

de manera similar, el vector $\vec{Q_0P}$ los podemos expresar como

$$\vec{Q_0P} = \tilde{\alpha}(Q_1 - Q_0) + \tilde{\beta}(Q_2 - Q_0)$$

Esto nos coonduce a relacionar los dos sistemas de referencia en la forma

$$\begin{aligned} \alpha &= A_1\tilde{\alpha} + B_1\tilde{\beta} + C_1 \\ \beta &= A_2\tilde{\alpha} + B_2\tilde{\beta} + C_2 \end{aligned}$$

lo cual podemos escribir como

$$\begin{aligned} \alpha &= a_{11}\tilde{\alpha} + a_{12}\tilde{\beta} + b_1 \\ \beta &= a_{21}\tilde{\alpha} + `a_{22}\tilde{\beta} + b_2 \end{aligned}$$

que en términos matriciales se escribe

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3 Consideremos el sistema descrito por los puntos $\{P_0(2,1), P_1(2+1/\sqrt{2}), P_2(2-1/\sqrt{2}, 1+1/\sqrt{2})\}$ y el sistema descrito por $\{Q_0(-3,2), Q_1(-4,2), Q_2(-3,1)\}$. Con esto

$$\begin{aligned} P_1 - P_0 &= (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \\ P_2 - P_0 &= (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \\ Q_1 - Q_0 &= (-1, 0) \\ Q_2 - Q_0 &= (0, -1) \end{aligned}$$

Observemos $\vec{OP} = (x, y)$ en el sistema $\{P_0\vec{P}_1, P_0\vec{P}_2\}$

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OP}_0 + P_0\vec{P} \\ &= (2,1) + P_0\vec{P}_1 \\ &= (2,1) + \alpha P_0\vec{P}_1 + \beta P_0\vec{P}_1 \end{aligned}$$

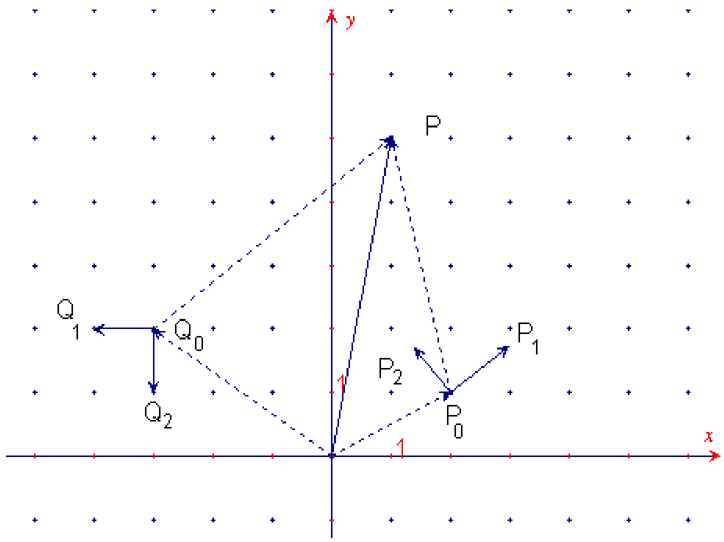


Figura 1.5: Dos sistemas de referencia.

con esto

$$(x, y) = (2, 1) + \alpha(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) + \beta(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

o escrito como

$$\begin{aligned} x &= 1/\sqrt{2}\alpha - 1/\sqrt{2}\beta + 2 \\ y &= 1/\sqrt{2}\alpha + 1/\sqrt{2}\beta + 1 \end{aligned}$$

lo que puede ser escrito en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o bien como

$$\vec{OP} = A\vec{v} + \vec{b}$$

en este caso, A es una matriz ortogonal.

Ahora bien, también podemos escribir el sistema como

$$A\vec{v} = \vec{OP} - \vec{b}$$

y entonces

$$\vec{v} = A^t(\vec{OP} - \vec{p})$$

Ahora bien, veamos $\vec{OP}$ en términos del otro sistema coordenado

$$\begin{aligned}
\vec{OP} &= \vec{OQ_0} + \vec{Q_0P} \\
&= (-3,2) + \tilde{\alpha}\vec{Q_0Q_1} + b\tilde{e}ta\vec{Q_0Q_2} \\
&= (-3,2)\tilde{\alpha}(-1,0) + \tilde{\beta}(0,1)
\end{aligned}$$

dando a lugar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si observamos estos dos sistema de referencia, podemos obtener una relación para α, β, $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta - 5 \\
\tilde{\beta} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\beta + 1
\end{aligned}$$

lo que en forma matricial escribimos

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lo que escribimos como

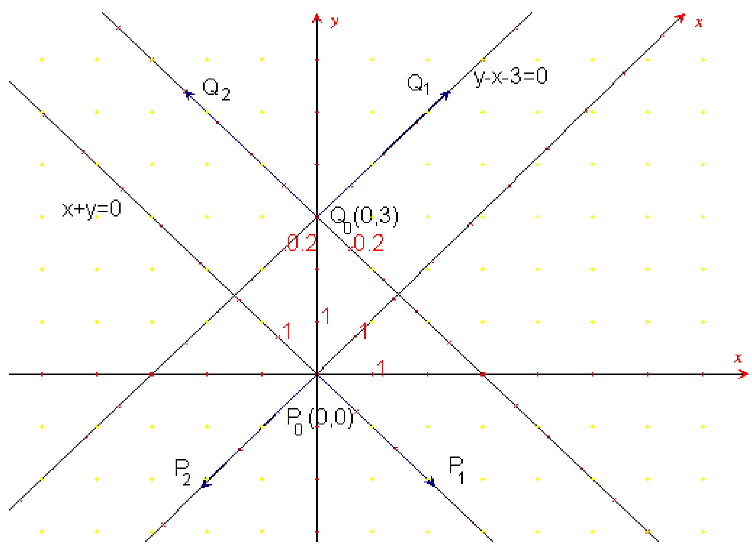
$$\tilde{v} = \tilde{A}v + c$$

lo que nos permite cambiar de un sistema de referencia a otro.

Trabajo 2 Considere los puntos de referencia $P_0(0,0)$ y $Q_0(0,3)$ y las rectas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &: \ y - x - 3 = 0 \\ \mathcal{L}_2 &: \ x + y = 0 \end{aligned}$$

Encuentre un punto $Q_1 \in \mathcal{L}_1$ y $Q_2 \in \mathcal{L}_1^{\perp}$. De tal manera que $\|\vec{Q_0 Q_1}\| = 1$ y $\|\vec{Q_0 Q_1}\| = 1$. Encuentre un punto $P_1 \in \mathcal{L}_2$ y un punto $P_2 \in \mathcal{L}_2^{\perp}$ de tal forma que $\|\vec{P_0 P_1}\| = 1$ y $\|\vec{P_0 P_1}\| = 1$.



Escriba el cambio de coordenadas de un sistema de referencia a otro.

1.1 Sistema de Coordenadas en el espacio

Para $\mathbb{R}^2$ usamos 3 puntos no alineados para construir un sistema de referencia. Ahora en $\mathbb{R}^3$, vamos a necesitar cuatro puntos no coplanares.

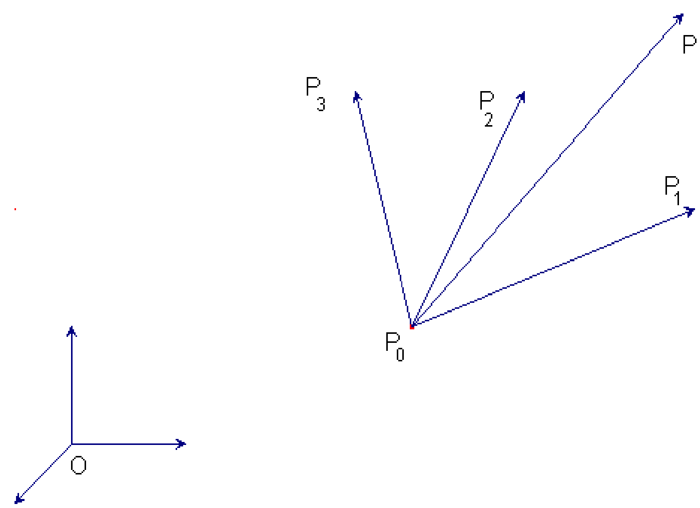


Figura 1.6: Un sistema de referencia para P.

La idea es considerar un punto de referencia, digamos P_0 y representar el vector $\vec{P_0P_1}$ en términos de los tres restantes

$$\vec{P_0P} = \alpha \vec{P_0P_1} + \beta \vec{P_0P_2} + \gamma \vec{P_0P_3}$$

por otra parte, con respecto a O, tenemos

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + \vec{P_0P}$$

Ejemplo 4 Consideremos $P_0(1,1,0)$, $P_1(1,2,0)$, $P_2(1,1,1)$ y $P_3(0,0,2)$

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OP_0} + \vec{P_0P} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con esto, tenemos el sistema

$$
\begin{aligned}
x &= 1 - \alpha_3 \\
y &= 1 + \alpha_1 - \alpha_3 \\
z &= \alpha_2 - 2\alpha_3
\end{aligned}
$$

lo cual escrito de manera matricial tenemos

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

o bien

$$
\vec{P} = A\bar{a} + b
$$

donde $\bar{a}$ es nuestro vector de componentes.

Ahora, consideremos otro sistema de referencia a partir de los puntos $\{Q_0(1,0,1)$, $Q_1(1,-1,0)$, $Q_2(0,0,-3)$ y $Q_3(1,2,4)$.

Por una parte tenemos que

$$
\begin{aligned}
\vec{OP} &= \vec{OQ_0} + \vec{Q_0P} \\
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_1 \vec{Q_0Q_1} + \beta_2 \vec{Q_0Q_2} + \beta_3 \vec{Q_0Q_2} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

lo que nos conduce

$$
\begin{aligned}
x &= 1 - \beta_2 \\
y &= -\beta_1 + 2\beta_3 \\
z &= 1 - \beta_1 - 4\beta_2 + 3\beta_3
\end{aligned}
$$

o bien escrito de manera matricial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, regresemos a nuestro sistema de referencia sobre el conjunto de las $P's$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= 1 - x \\ \alpha_1 &= y - 1 + \alpha_3 \\ &= y - x \\ \alpha_2 &= z - 2\alpha_3 \\ &= z - 2 + 2x \end{aligned}$$

esto es

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

esto es, podemos escribir las componentes en el sistema vectorial, a partir de las coordenadas de P

$$\bar{a} = \tilde{A}\vec{P} + \tilde{b}$$

Ahora, observemos el cambio de coordenadas entre un punto y otro.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= y - x0 = (-\beta_1 + 2\beta_3) - (1 - \beta_2) \\ &= -\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 - 1 \\ \alpha_2 &= 2x + z - 2 = 2(1 - \beta_2) + (1 - \beta_1 - 4\beta_2 + 3\beta_3) - 2 \\ &= -\beta_1 - 6\beta_2 + 3\beta_3 + 1 \\ \alpha_3 &= 1 - x = 1 - (1 - \beta_2) \\ &= \beta_2 \end{aligned}$$

con esto, nuestro cambio de coordenadas entre un sistema de referencia y otro lo escribimos en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Trabajo 3 Considere el sistema determinado en el espacio por los puntos $\{P_0(1,1,2), P_1(1,-1,2), P_2(1,2,3),\ P_3(3,2,1)\}$ y el sistema $\{Q_0(3,0,-1),$ $Q_1(4,2,2),\ Q_2(2,2,1), Q_3(0,1,-1)\}$. Obtenga la transformación entre un sistema y el otro.

El cambio de coordenadas entre un sistema y lo podemos escribir en la forma

$$\tilde{P} = A\bar{P} + \bar{b}$$

donde $\bar{P}$ son las "antiguas" coordenadas, $\tilde{P}$ son las nuevas, $\bar{b}$ representa una traslación.

Lo que hemos venido haciendo, es pasar de un sistema convencional al sistema de referencia generado por los puntos $P_0P_1P_2P_3$, de igual manera con respecto a $Q_0Q_1Q_2Q_3$, para entonces, describir un sistema en términos del otro.

Figura 1.7: Relacionando dos sistemas de referenmcia.

Con esto, en el sistema de referencia $\{P_0P_1P_2P_3\}$ tenemos que

$$\tilde{P} = A_1P + b_1$$

y con respecto a $\{Q_0Q_1Q_2Q_3\}$

$$\hat{P} = A_2P + b_2$$

conociendo cómo observan cada sistema a P, podemos saber cómo representar un sistema en otro, es decir, poder pasar de $\tilde{P}$ a $\hat{P}$.

En forma matricial tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{P} - b_1 &= A_1P \\ A_1^{-1}(\tilde{P} - b_1) = P & \end{aligned}$$

y sustituyendo en el segundo sistema, tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= A_2(A_1^{-1}(\tilde{P} - b_1) + b_2) \\ &= A_2A_1^{-1}\tilde{P} - A_2A_1^{-1}b_1 + b_2 \\ &= B\tilde{P} + \bar{c} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} B &= A_2A_1^{-1} \\ \bar{c} &= b_2 - A_2A_1^{-1}b \end{aligned}$$

Observación 1 La matriz asociada al cambio de coordenadas, debe ser no singular, para resolver el sistema en todo momento. Por ejemplo, debe comprobarse que $\det(A) \neq 0$.

Observación 2 Si transformamos un sistema ortogonal a otro que también lo es, entonces, A tiene que ser una matriz ortogonal, es decir, que las columnas de A son ortogonales y de longitud 1. Lo mismo ocurre por filas.

Observación 3 Si A es una matriz ortogonal, $A^{-1} = A^t$. Ahora bien, si la matriz A la escribimos por columnas en la forma

$$A = [a_1|a_2|a_3]$$

la transpuesta de A se escribe for renglones como

$$A^t = \left[\begin{array}{c} a_1^t \\ \hline a_2^t \\ \hline a_3^t \end{array} \right]$$

1.2 Cambio de escala

En muchas ocasiones, necesitamos obtener vectores que sean el doble o la mitad de uno, esto lo escribimos como

$$\begin{aligned} P &\mapsto 2P \\ P &\mapsto \frac{1}{2}P \end{aligned}$$

para lograrlo, podemos representar este cambio a través del producto matricial

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P$$

y

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} P$$

Problema 2 Tenemos la elipse representada por la ecuación

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{x^2}{2^2}=1$$

Cómo lograr un cambio de coordenadas que transforme este objeto a una circunferencia?

Si aplicamos el cambio

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \frac{x}{4}\\ \tilde{y} &= \frac{y}{2}\end{aligned}$$

entonces de

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1$$

tenemos que

$$\tilde{x}+\tilde{y}=1$$

y la transformación la escribimos como

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/4 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

lo que interpretamos como un cambio de escala, distinto en cada dirección.

De manera similar el elipsoinde

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{2^2}+\frac{z^2}{(\frac{1}{4})^2}=1$$

que se puede escribir como

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2+(4z)^2=1$$

la cual puede ser transformado en una esfera a través del cambio

$$
\begin{aligned}
\tilde{x} &= \frac{x}{4} \\
\tilde{y} &= \frac{y}{2} \\
\tilde{z} &= 4z
\end{aligned}
$$

lo que se escribe de manera matricial como

$$
\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
$$

En general, nuestras transformaciones las escribiremos de la forma

$$
\tilde{P} = AP + b
$$

donde A representa un cambio de escala o una rotación y b es una traslación.

Trabajo 4 Hacer los 8 ejercicios del capítulos 3 del libro de texto.

Capítulo 2

Superficies en $\mathbb{R}^3$

Problema 3 Qué es una superficie?

Necesitamos establablecer una relación homeomorfa

$$\begin{array}{lcl} \text{línea} & \leftrightarrow & \text{curva} \\ \text{plano} & \leftrightarrow & \text{superficie} \end{array}$$

Propiedad 1 (Local). Curva: Si cada segmento podemos asociarlo a un segmento de recta. Superficie: Si a cada subregión (parche) podemos asociarle una subregión plana.

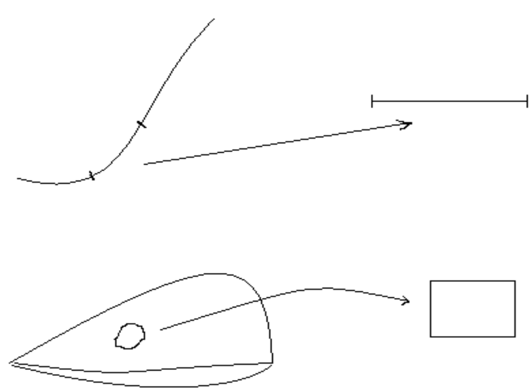


Figura 2.1: Propiedad local de curvas y superficies.

Observación 4 En el caso de un cuba, la “superficie” del cubo presenta singularidades en las esquinas, a ellas no podemos asociarle un plano.

Una deficinión moderna de curvas y superficies hace mención a las “variedades”, un subespacio de dimensión menor al total

$$\begin{array}{rcl} 1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ 2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \vdots & \\ m-1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Problema 4 Dada una superficie, podemos obtener una representación analítica, esto es, una ecuación que le caracterize. Y el problema directo, dada una ecuació, poder observar una superficie que describa.

Entre las superficies más sencillas tenemos:

a) Plano.

b) Esfera.

c) Cilindro.

d) Conos (cuentan con una singularidad).

Pregunta: ¿Si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son dos distintas curvas, y asociamos un mapeo biyectivo entre una y otra, tenemos un plano?

Problema 5 En $\mathbb{R}^2$, $x^2 + 2y = 1$, es una línea.
En $\mathbb{R}^3$, $x^2 + 2y = 1$ es un plano. La colección de puntos del plano lo podemos escribir en la forma

$$\Pi : \left\{ (x, y, z) | \quad (x, \frac{1-x}{2}, z) \right\}$$

Si observamos la forma implícita, es un plano que es perpendicular al eje XY.

Figura 2.2: Una superficie formada a partir de dos curvas.

Problema 6 La ecuación

$$x^2 + y^2 = 1$$

representa una circunferencia en $\mathbb{R}^2$. En $\mathbb{R}^3$ representa un cilindro

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) | \quad x^2 + y^2 = 1, z \in \mathbb{R}\right\}$$

En general, si $f(x, y) = 0$, representa en $\mathbb{R}^2$ una curva, lo observamos en $\mathbb{R}^3$ como esa curva y rectas paralelas al eje Z.

2.1 Conos

En $\mathbb{R}^3$, dada una curva y un punto P que no pertenece a ella, formamos la colección de rectas que parten de un punto de la curva hacia ese punto P fijo, con ello formamos un cono

Problema 7 Cómo construir una ecuación que define al cono.

Consideremos un cono isósceles, esto es que la misma distancia que existe de un punto del cono hacia el eje, es la misma que hacia el punto de referencia.

Figura 2.3: Un cono.

Figura 2.4: Un cono circular.

Bajo esto, podemos considerar la proyección del punto (x, y, z) sobre el eje Z y calcular distancias

$$\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \| = z^2$$

logrando la expresión

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Sin embargo, no tiene porque ser igual la distancia hacia el punto de referencia, puede ser proporcional, en su casoo obtendríamos una expresión de la forma

$$x^2 + y^2_= k^2 z^2$$

Trabajo 5 Considere a los conos circulares que tienen por eje a la recta $\bar{P} = t(2,2,2)$, $t \in \mathbb{R}$ y que tienen por vértice a $(1,1,1)$. Encontrar la ecuación del cono que describen y dibujarlo.

Problema 8 Dado un punto de referencia P_0 y un vector, de dirección, cómo construir el cono que tiene por eje a la recta que describen? Si se cuenta con la ecuación, cómo podemos saber si en efecto representa a un cono.

Tenemos la ecuación

$$a_1x^2 + b_1y^2 + c_1z^2 + d_1xy + d_2yz + d_3zx + e_1 + e_2y + e_3z + f = 0.$$

Si el cono pasa por el origen, $f = 0$.

Supongamos que $(1,1,1)$ pertenece al cono y veamos una relación para el cono. Si esto ocurre, entonces (α, α, α) está sobre el cono y tenemos una relación

$$a + b + c + d_1 + d_2 + d_3 + e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

Si el eje X pertenece al cono, esto es cualquier punto $\alpha(1,0,0)$ por igual pertenece al cono, y con esto $a = 0$. Ahora bien, si los ejes Y y Z pertencen al cono, tenemos que $b = c = 0$. Con lo cual tendríamos una expresión

$$d_1xy + d_2yz + d_3zx = 0$$

Ahora, si suponemos que $(1,-1,1)$ pertenece al cono, tenemos que $\alpha(1,-1,1)$ pertenece al cono y entonces $d_3 = 0$ y con esto

$$d_1 + d_2 = 0$$

Si pudieramos hacer $d_1 = 1$ y $d_2 = -1$, tenemos

$$xy = yz = 0$$

Observación 5 SI $F(x, y, z) = 0$ es una cuadrática que describe al cono, y éste tiene su vértice en el origen, entonces el cono debe contener algunas rectas que psan por el origen.

Problema 9 Observemos la forma de la ecuación para conos circulares. Considremos un vector $\vec{n} = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$ que describe el eje. Sea $P(x, y, z)$ un punto del cono

Figura 2.5: Propiedades de un cono isósceles.

La idea es proyecta $\vec{OP}$ sobre $\vec{n}$. Por una parte, tenemos que

$$\vec{OP} \cdot \vec{n} = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

Ahora bien, se cuenta con un cono isósceles, luego si $\tilde{P}$ es el pie de la proyección de $\vec{OP}$ sobre $\vec{n}$, debemos buscar la colección de puntos P, tales que

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{P\tilde{P}}\| &= k\|O\tilde{P}\| \\ &= k(\alpha x + \beta y + \gamma z) \end{aligned}$$

Como $\tilde{P}$ es el pie de la proyección, tenemos que

$$O\tilde{P} = \vec{n}(\alpha x + \beta y + \gamma z)$$

de esta forma,

$$\vec{P\tilde{P}} = \vec{n}(\alpha x + \beta y + \gamma z) - (x, y, z)$$

con lo cual, la propieda para el cono se escribe

$$\|\vec{n}(\alpha x + \beta y + \gamma z) - (x, y, z)\|^2 = k^2(\alpha x + \beta y + \gamma z).$$

Trabajo 6 .

1. Dibujar y dar las ecuaciones del cono con vértice en el origen y vector de dirección del eje $\vec{n} = 1/\sqrt{2}(1, 1, 0)$ y $k = 1/2$.

2. Encuentre las intersecciones con los planos

   a) $z = 1$
   b) $x = 1$
   c) $x + y = 1$

Problema 10 En $\mathbb{R}^3$, describir una circunferencia por medio de su ecuación es muy sencillo:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1$$

Ahora, en $\mathbb{R}^3$, cómo puedo describir a un círculo?

Consideremos un plano

$$\Pi_0 = \{(x, y, z)| \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

se cuenta con un punto en el plano $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y un radio r_0. Cómo encontrar la circunferencia de centro (x_0, y_0, z_0) y de radio r_0 sobre ese plano?

Ejemplo 5 Consideremos el plano

$$\Pi = \{(x, y, z)| \quad x + y + z = 1$$

y el punto $(1, 1, -1)$ y de radio $r = 1$.

Idea: Sobre (x_0, y_0, z_0) construir un sistema coordenado.

Figura 2.6: Sistema de referencia local para la circunferencia sobre el plano.

Como (x_1, y_1, z_1) está en el plano,

$$x_1 + y_1 + z_1 = 1$$

considerando el vector diferencia con P_0

$$(x_1 - 11, y_1 - 1, z_1 + 1)$$

si tomamos $z_1 = 0$ tenemos que $x_1 + y_1 = 1$, y eligiendo $y_1 = 0$, tenemos $x_1 = 1$. Con esto hemos obtenido un punto $P_1(1, 0, 0$ y el vector $v_1 = (0, -1, 1)$.

Ahora, obtengamos otro punto (x_2, y_2, z_2) sobre el plano, tal que

$$(x_2 - 1, y_2 - 1, z_2 + 1) \perp (0, -1, 1)$$

esto es que

$$-(y_2 - 1) + z_2 + 1 = z_2 - y_2 + 2 = 0$$

Dado que el punto pertenece al plano, tenemos que

$$x_2 + y_2 + z_2 - 1 = 0$$

obteniendo que

$$x_2 + 2z_2 + 1 = 0$$

Tomando $z_2 = 0$, $x_2 = -1$ y con esto $y_2 = 2$. Así hemos construido el punto $P_2(1, -2, 0)$ y $v_2 = (-2, 1, 1)$. Con esto, un punto $P(x, y, z) \in \Pi$, lo escribimos como

$$\begin{aligned} P &= P_0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \\ &= P_0 + \alpha_1(0, -1, 1) + \alpha_2(-2, 1, 1) \end{aligned}$$

logrando la relación

$$\begin{aligned} x &= 1 - 2\alpha_2 \\ y &= 1 - \alpha_1 + \alpha_2 \\ z &= -1 + \alpha_1 + \alpha_2 \end{aligned}$$

Ahora, si normalizamos esos vectores, tendremos

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1) \\ u_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1) \end{aligned}$$

Con esto, las ecuaciones para los puntos sobre el plano se escriben como

$$
\begin{aligned}
x &= 1 - \frac{2}{\sqrt{6}}\alpha_2 \\
y &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\alpha_2 \\
z &= -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\alpha_2
\end{aligned}
$$

y con esto, para lograr los puntos P sobre la circunferencia, debemos pedir que

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$$

esto se sigue de pedir que

$$
\begin{aligned}
\|P - P_0\|^2 &= \|\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2\|^2 = r^2 \\
&= \alpha_1 \|u_1\|^2 + 2\alpha_1\alpha_2 u_1 \cdot u_2 + \alpha_2^2 \|u_2\|^2 \\
&= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = r^2
\end{aligned}
$$

Usando la forma paramétrica de la circunferencia, esta puede observarse alrededor de un punto como

$$
\begin{aligned}
x - x_0 &= r\cos\theta \\
y - y_0 &= r\text{sen }\theta
\end{aligned}
$$

Si pensamos a x como α_1 y y como α_2, sobre nuestro sistema local de referencia escribimos una circunferencia de radio uno como

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \cos\theta \\
\alpha_2 &= \text{sen }\theta
\end{aligned}
$$

con lo cual obtenemos una expresión explícita para la circunferencia sobre el plano Π en la forma

$$
\begin{aligned}
x &= 1-\frac{2}{\sqrt{6}}\text{sen } \theta \\
y &= 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{6}}\text{sen } \theta \\
z &= -1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{6}}\text{sen } \theta
\end{aligned}
$$

Ahora bien, si consideramos la proyecciones en los planos Π_{XY}, Π_{XZ} y Π_{YZ}, obtendremos elipses las más de las veces.

Observemos la proyección de la circunferencia sobre Π_{XY}, con esto tenemos que

$$
\begin{aligned}
x &= 1-\frac{2}{\sqrt{6}}\text{sen } \theta \\
y &= 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{6}}\text{sen } \theta
\end{aligned}
$$

obteniendo que

$$\text{sen } \theta = -\frac{\sqrt{6}}{2}(x-1)$$

así

$$y-1=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{1}{2}(x-1)$$

de donde observamos que

$$\cos\theta=-\sqrt{2}[(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)]$$

lo que nos conduce a

$$1 = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \frac{3}{2}(x-1)^2 + 2[(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)]^2$$

lo que respresenta a una elipse.

Trabajo 7 Hacer de nueva cuenta el ejercicio, y comprobar que las proyecciones con los planos son elipses.