Capítulo 1

Coordenadas

1.1 Proyección ortogonal

Problema 1 Dada una recta $\mathcal{L}$ y un punto P, la proyección ortogonal de P en $\mathcal{L}$ es un punto $P' \in \mathcal{L} \cap \mathcal{L}_P$, donde $\mathcal{L}_P$ es la recta perpendicular a $\mathcal{L}$ que pasa por P.

Figura 1.1: Proyección de un punto en una recta y de un punto en un plano.

Ahora bien, sobre $\mathbb{R}^2$ decimos que P' es la proyección ortogonal de P sobre el plano Π, $P' \in \Pi \cap \mathcal{L}_P$ donde $\mathcal{L}_P$ es la recta perpendicular a Π que pasa por P.

Problema 2 Si contamos con un segmento de recta PQ, nos interesa prooyectarlo sobre una recta $\mathcal{L}$, intuitivamente lo vemos

Figura 1.2: Proyección de segmentos en una recta.

Para esto, necesitamos darle una orientación a los segmentos. Si θ es el ángulo con respecto a la horizontal, el segmento $P'Q'$ proyectado en $\mathcal{L}$ lo calculamos como

$$\begin{aligned} P'Q' &= PQ\cos\theta \\ &= d(P,Q)\cos\theta \end{aligned}$$

Ahora bien, si consideramos $Q'P'$, tendremos entonces

$$\begin{aligned} Q'P' &= QP\cos(180^\circ+\theta) \\ &= -QP\cos\theta \\ &= -d(P,Q)\cos\theta \\ &= -P'Q' \end{aligned}$$

Propiedad 1 Si $P_1, P_2, \ldots, P_n$ es un polígono en $\mathbb{R}^2$ y $P_1', P_2', \ldots P_n'$ son sus proyecciones sobre una recta $\mathcal{L}$, si observamos los segmentos $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_nP_1$, obtendremos que

$$P_1'P_n' = P_1'P_2' + P_2'P_3' + \cdots P_{n-1}'P_n'$$

Figura 1.3: Proyección de un segmento en una recta.

Problema 3 Se cuenta con una recta $\mathcal{L}$ y un segento dirigido $\vec{AB}$ observamos el ángulo de $\vec{AB}$ con respecto a la horizontal, tenemos

$$\begin{aligned}\mathrm{Proy}(\vec{AB}) &= \vec{A'B'} \\ &= |AB|\cos\alpha\end{aligned}$$

ahora bien, si observamos la proyección de $\vec{BA}$ con respecto al ńgulo

$$\begin{aligned}\mathrm{Proy}(\vec{BA}) &= \vec{B'A'} \\ &= |\vec{BA}|\cos(180^\circ - \alpha) \\ &= -|\vec{BA}|\cos\alpha \\ &= -|\vec{AB}|\cos\alpha\end{aligned}$$

lo que escribimos como

$$\vec{A'B'} = -\vec{B'A'},$$

o muchas veces por la relación

$$A'B' + B'A' = 0$$

Las proyecciones nos serán de gran utilidad para descubrir propiedades de elementos geométricos.

Problema 4 Consideremos un polígono cerrado en el espacio

Figura 1.4: Un polígono cerrado en el espacio.

Tenemos que, se satisface la relación del ciclo

$$\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \cdots \overrightarrow{P_{n-1}P_n} + \overrightarrow{P_nP_1} = \overrightarrow{P_1P_1} = \vec{0}$$

observando sus proyecciones, tenemos

$$\overrightarrow{P_1'P_2'} + \overrightarrow{P_2'P_3'} + \cdots \overrightarrow{P_{n-1}'P_n'} + \overrightarrow{P_n'P_1'} = \overrightarrow{P_1'P_1'} = \vec{0}$$

de manera particular, podemos escribir

$$\overrightarrow{P_1'P_2'} + \overrightarrow{P_2'P_3'} + \cdots \overrightarrow{P_{n-1}'P_n'} = -\overrightarrow{P_n'P_1'} = \overrightarrow{P_1'P_n'}$$

que se escribe

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| \cos \alpha_1 + |\overrightarrow{P_2P_3}| \cos \alpha_2 + \cdots + |P_{n-1}P_n| \cos \alpha_{n-1} = |P_1P_n| \cos \theta_1$$

Observación 1 En forma vectorial

$$v \cdot w = |v||w| \cos \alpha$$

lo que en términos de proyecciones se escribe como

$$\begin{aligned} v \cdot w &= |v| \mathrm{Proy}_v(\vec{W}) \\ &= |w| \mathrm{Proy}_w(\vec{V}) \end{aligned}$$

Capítulo 2

Cosenos directores

Consideremos un sistema coordenado ortonormal, dado por los vectores canónicos en $\mathbb{R}^3$, y un punto $P(a, b, c)$ como se observa en la figura

Figura 2.1: Ángulos entre una línea que parte de O hacia P.

Si P' es la proyección de P al plano Π_{xy}, tenemos la relación

$$\begin{aligned} |\vec{OP}|^2 &= |\vec{OP'}|^2 + |\vec{P'P}|^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

consideremos la distancia de P al origen

$$r = |\vec{OP}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

es fácil calcular el coseno del ángulo del vector $\vec{OP}$ hacia los ejes X, Y, y Z respectivamente

$$\cos\alpha = \frac{a}{r}; \quad \cos\beta = \frac{b}{r}; \quad \cos\gamma = \frac{c}{r}$$

a los que llamaremos como cosenos directores de la línea que pasa O y P.

Observación 2 Obsérve que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Problema 5 Dado el punto $P(3, -2, 5)$ calcule los cosenos directores de la línea que pasa por O y P.

2.1 Ángulo entre dos líneas

Problema 6 Se cuenta con dos líneas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ que se intersectan, el problema es encontrar el ángulo que forman.

Procedimiento

1. Trasladar el punto de intersección de las rectas al origen.

2. Considere un punto $P_1 \in \mathcal{L}_1$ y un punto $P_2 \in \mathcal{L}_2$, con $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$

3. La idea es proyectar OP_2 en $\mathcal{L}_1$. Por una parte, si N es la proyección de P en Π_{xy} y M la de N en el eje X, tenemos

$$\vec{OP_2} = \vec{OM} + \vec{MN} + \vec{NP_2}$$

observando sus proyecciones, tenemos

Figura 2.2: Par de líneas que parten del origen.

$$
\begin{aligned}
O\vec{P}_2' &= O\vec{M}' + M\vec{'}N' + N\vec{'}P_2' \\
&= |OM| \cos \alpha_1 + |MN| \cos \beta_1 + |NP_2| \cos \gamma_1 \\
&= x_2 \cos \alpha_1 + y_2 \cos \beta_1 + z_2 \cos \gamma_1
\end{aligned}
$$

y observamos, de las proyecciones, que

$$
\begin{aligned}
|OP_2| \cos \theta &= x_2 \cos \alpha_1 + \text{‘}y_2 \cos \beta_1 + z_2 \cos \gamma_1 \\
&= (|OP_2| \cos \alpha_2) \cos \alpha_1 + (|OP_2| \cos \beta_2) \cos \beta_1 + (|OP_2| \cos \gamma_2) \cos \gamma_1 \\
&= |OP_2| [\cos \alpha_2 \cos \alpha_1 + \cos \beta_2 \cos \beta_1 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_1
\end{aligned}
$$

con esto,

$$
\cos \theta = \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 + \cos \beta_2 \cos \beta_1 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_1
$$

Trabajo 1 Resuelva adecuadamente los ejercicios de la sección 3, pág. 7, los números 3, 7 y 9, de igual manera, proceda con los ejercicios de la sección 6, pág. 9, los números 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, y 15.

2.2 Razón entre segmentos y proyecciones

Consideremos dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ y observemos su proyección sobre una línea, por ejemplo algun eje

Propiedad 2 Si contamos con un punto P que divide a P_1P_2 en una razón

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

tenemos que sus proyecciones conservan la misma razón

$$\frac{P_1'P'}{P'P_2'} = \frac{m_1'}{m_2'}$$

Observación 3 Si consideramos los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, tenemos

$$\frac{P_1'P'}{P'P_2'} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m_1}{m_2}$$

- Dado los extremos, y la razón, podemos calcular P.
- Dado P, podemos obtener la razón en que P divide al segmento.

Con esto,

$$x - x_1 = (x_2 - x)\frac{m_1}{m_2}$$

$$\begin{aligned} m_2x - m_2x_1 &= m_1x_2 - m_1x \\ m_2x + m_1x &= m_2x_1 + m_1x_2 \end{aligned}$$

y con esto,

$$x = \frac{m_2x_1 + m_1x_2}{m_2 + m_1}$$

de manera análoga, observamos

$$\begin{aligned} y &= \frac{m_2y_1 + m_1y_2}{m_2 + m_1} \\ z &= \frac{m_2z_1 + m_1y_2}{m_2 + m_1} \end{aligned}$$

Ejemplo 1 Se tiene los puntos $P_1(1,2,3)$ y $P_2(-1,0,4)$ y la razón en que $P(x,y,z)$, divide al segmento que use a esos puntos

$$\frac{P_1P}{PP_2} = 4$$

Encontremos al punto P

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 \cdot x + 4 \cdot x_2}{1+4} \\ y &= \frac{1 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2}{1+4} \\ z &= \frac{1 \cdot z_1 + 4 \cdot z_2}{1+4} \end{aligned}$$

y con esto

$$P(-3/5, 2/5, 19/5)$$

En la práctica escribimos

$$x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}x_1 + \frac{m_1}{m_1 + m_2}x_2$$

o bien, bajo la propiedad

$$x_1 = \alpha x_1 + \beta x_2 \qquad \alpha + \beta = 1$$

lo que se puede escribir como

$$x = (1 - \beta)x_1 + \beta x_2$$

o bien

$$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$$

En forma vectorial tenemos

$$P = (1 - \beta)P_1 + \beta P_2 \quad \text{si } \beta \in [0, 1]$$

o bien

$$P = \alpha P_1 + (1 - \alpha)P_2 \quad \text{si } \alpha \in [0, 1]$$

Capítulo 3

El plano y la línea

Los objetos geométricos pueden ser reprentados de manera explícita e implícita.

Pregunta: Cúando un objeto geométrico es un plano?

$$\Pi = \left\{ P \in \mathbb{R}^3 | P\text{satisfacen cierta propiedad} \right\}$$

Propiedad

- 3 puntos no alineados lo determinan.
- Dos puntos P y Q en Π, se sigue que $\mathcal{L}(P, Q) \subset \Pi$.

Theorem 1 El lugar geométrico de los puntos que satisfacen la ecuación

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Con término distinto de cero, describen un plano.

Ejemplo 2 La ecuación

$$x + 2x - 3z + 6 = 0$$

describe un plano?

Para ver esto, necesitariamos localizar 3 puntos no alineados que satisfagan dicha ecuación.

Encontremos los tres puntos, dándoles valores a un par de coordenadas y encontrando las restantes. Pidamos que $z = y = 0$, para este caso tenemos $x = -6$. Ahora, hagamos $x = y = 0$, obteniendo $z = 2$. Haciendo $x = z = 0$, tenemos $y = -3$. Claramente esos tres puntos son no colineales.

Otra forma de mostrarlo es la siguiente. Consideremos que los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ se encuentran en el plano Π, luego, se satisface que

$$\begin{aligned} x_1 + 2y_1 - 3z_1 + 6 &= 0 \\ x_2 + 2y_2 - 3z_2 + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Si $P \in \mathcal{L}(P_1, P_2)$ entonces

$$\begin{aligned} x &= (1-\beta)x_1 + \beta x_2 \\ y &= (1-\beta)y_1 + \beta y_2 \\ z &= (1-\beta)z_1 + \beta z_2 \end{aligned}$$

Para ver que la ecuación representa un plano, debemos ver que P satisface la ecuación.

Observe que $P(0, 0, 0) \notin \Pi$.

De manera implícita, tenemos la representación de un plano

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

y para una recta? Para representarla de manera implícita, necesitaremos dos planos.

Ahora bien, la ecuación del plano

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

lo podemos llevar a la forma

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D} = 1$$

o bien escribirlas como

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

donde a, b, c representan las intereseccciones con los ejes, basta comprobarlo.

3.1 Forma normal del plano

Consideremos la ecuación del plano

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

para la pareja (A, B, C, D) esta representación no es única, por ejemplo

$$\begin{aligned} (3,4,4,5) &\mapsto \Pi_1 \\ (7,8,0,1) &\mapsto \Pi_2 \\ (1,1,1,-1) &\mapsto \Pi_3 \\ (2,2,2,-2) &\mapsto \Pi_3 \\ (3,3,3,-3) &\mapsto \Pi_3 \end{aligned}$$

Vamos a caracterizarlo a través de la distancia al origen, siempre que $D \neq 0$. Veamos la distancia del plano al origen.

Observemos la forma explícita de la ecuación de la recta

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ (A, B) \cdot (x, y) + C &= 0 \\ \vec{n} \cdot P + C &= 0 \end{aligned}$$

es importante observar que $\vec{n}$ es un vector normal a la recta. Ahora bien, si $P_0 \in \mathcal{L}$, tenemos que $\vec{n} \cdot P_0 + C = 0$, y con esto tener a $C = -\vec{n} \cdot P_0$, con lo cual podemos escribir la recta como

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot P + (-\vec{n} \cdot P_0) &= 0 \\ \vec{n} \cdot (P - P_0) &= 0 \end{aligned}$$

Lo que representa una forma de escribir la recta de manera impícita.

Hagamos un procedimiento similar para el plano. Consideremos la ecuación de un plano

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

de manera similar podemos tener

$$(A, B, C) \cdot (x, y, z) + D = 0$$

y lograr una representación para el plano en la forma

$$\vec{n} \cdot (P - P_0) = 0$$

donde $\vec{n}$ es un vector normal al plano (en este caso $\vec{n} = (A, B, C)$) y P_0 es un punto del plano.

Problema 7 Calculemos la distancia de la recta al origen. Para esto, consideremos la recta perpendicular a $\mathcal{L}$ y que pasa por el origen, el punto de intersección no indicará la distancia del origen a la recta.

La recta que pasa por el origen y es perpendicular a $\mathcal{L}$, tiene la forma

$$\mathcal{L}^{\perp} = \{Q| \quad Q = \alpha\vec{n}\}$$

Con esto, basta encontrar α tal que $Q^* = \alpha\vec{n} \in \mathcal{L}$

Figura 3.1: Distancia de una recta al origen.

$$\vec{n} \cdot (\alpha \vec{n} - P_0) = 0$$

con esto, resolvemos para α

$$\alpha = \frac{\vec{n} \cdot P_0}{\vec{n} \cdot \vec{n}}$$

Obteniendo el punto de intersección

$$Q^* = \left(\frac{\vec{n} \cdot P_0}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \right) \vec{n}$$

Si $\vec{n}$ fuese unitario, $\vec{n} \cdot P_0$ sería la distancia de la recta al origen.

Ejemplo 3 Consideremos

$$3x - 2y + 4z - 33 = 0$$

tenemos el vector normal al plano $\vec{n} = (3, -2, 4)$, su norma es $\|\vec{n}\| = \sqrt{29}$, usemos este número en el plano

$$\frac{3}{\sqrt{29}}x - \frac{2}{\sqrt{29}}y + \frac{4}{\sqrt{29}}z - \frac{33}{\sqrt{29}} = 0$$

observemos que

$$(\frac{3}{\sqrt{29}}, -\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}})$$

es un vector normal.

De manera general, tenemos que un plano

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

lo podemos escribir de la forma

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z + \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$

o bien,

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

donde $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Esto es, α, β y γ son los cosenos directores de la recta normal al plano.

3.2 Ángulo entre dos planos

Cómo calcular el ángulo que forman dos planos? Para esto, observemos El ángulo entre las normales.

Contando con dos planos

$$\begin{aligned} \Pi_1 &: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \Pi_2 &: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}$$

consideremos los vectores normales a los planos

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 &= (A_1, B_1, C_1)\\ \vec{n}_2 &= (A_2, B_2, C_2)\end{aligned}$$

y con ello calculemos el producto interior entre ambos

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\| \cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre esas normales. Conesto logramos

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|}$$

3.3 Distancia de un punto al plano

Calculemos la distancia de un punto Q a un plano Π

Figura 3.2: Distancia de un punto a un plano.

Consideremos la forma normal del plano

$$\vec{n}_1 \cdot P - \vec{n}_1 \cdot P_0 = 0$$

donde el vector normal $\vec{n}_1$ ya está normalizado. Ahora bien, consideremos el vector que parte de P_0 hacia Q y observemos el ángulo que forman

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 \cdot (Q - P_0) &= \|\vec{n}_1\| \|Q - P_{\|} \cos \theta \\ &= \|Q - P_0\| \cos \alpha = d\end{aligned}$$

que es la distancia al plano.

En términos prácticos, esto lo escribimos como

$$\begin{aligned}d &= \vec{n}_1 \cdot (Q - P_0) \\ &= \vec{n}_1 \cdot Q - \vec{n}_1 \cdot P_0 \\ &= \vec{n}_1 \cdot Q \\ &= \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\end{aligned}$$

Trabajo 2 Resuelva adecuadamente los ejercicios 3 y 4 de la pág. 14 del libro de texto. De igual manera, proceda con los ejercicios 1, 3, 4, 10, 18, de las págs. 18 y 19.

Problema 8 En $\mathbb{R}^2$, consideremos un punto de referencia O, y dos vectores V_1 y V_2

el problema es expresar un punto P en término de los vectores $\vec{V_1}$ y $\vec{V_2}$. La idea es representar $\vec{OP}$ en combinación lineal con $\vec{V_1}$ y $\vec{V_2}$

$$\vec{OP} = \alpha_1 \vec{V_1} + \alpha_2 \vec{V_2}$$

con esto, tenemos un sistema de referencia de $\vec{OP}$ con respecto a $\vec{V_1}$ y $\vec{V_2}$.

Ejemplo 4 Considere el punto $P(3, 1)$ y los vectores $\vec{V_1} = (1, 1)$ y $\vec{V_2} = (0, 3)$. El problema es observar al punto en base a $\vec{V_1}$ y $\vec{V_2}$. Esto es, encontrar α y β tales que

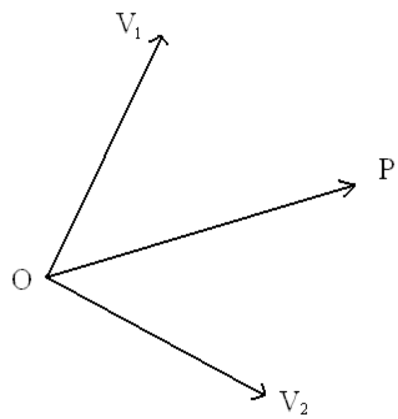


Figura 3.3: Vectores de referencia.

Figura 3.4: Representando gráficamente un vector en término de otros dos.

$$\vec{OP} = (3,1) = \alpha\vec{V_1} + \alpha_2\vec{V_2}$$

es decir,

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \alpha_1(1,1) + \alpha_2(0,3)\\ &= (\alpha_1,\alpha_1) + (0,3\alpha_2)\\ &= (\alpha_1,\alpha_1+3\alpha_2)\end{aligned}$$

Lo que nos conduce a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas; resolviendo, tenemos $\alpha_1 = 3$ y $\alpha_2 = -2/3$.

$$\vec{OP} = 3\vec{V_1} - 2/3\vec{V_2}$$

lo que escribimos como

$$(\alpha_1, \alpha_2) \mapsto P$$

Ahora, si considereamos otro punto de referencia, digamos $(1, 0)$

Figura 3.5: Otro sistema de referencia.

El punto P con respecto al centro de referencia O es $(3, 1)$, ahora en O' será $(2, 1)$. Con esto, necesitamos resolver para α_1 y α_2 de tal manera que

$$\begin{aligned} (2,1) &= \alpha_1'(1,1) + \alpha_2'(0,3) \\ &= (\alpha_1' + \alpha_1' + 3\alpha_2') \end{aligned}$$

resolviendo el sistema, tenemos que $\alpha_1' = 2$ y $\alpha_2' = -1/3$, para este sistema

$$(2, -1/3) \mapsto P$$

Obs: En $\mathbb{R}^2$ podemos usar un triángulo para hacer referencia a un punto en términos de los vértices (en general, sobre cualquier conjunto de puntos, más 3 es suficiente.)

Para esto, usemos dos vectores de referencia, digamos $\vec{V_1} = \vec{P_1P_2}$ y $\vec{V_2} = \vec{P_1P_3}$, con esto, la idea es encontrar

$$\vec{P_1P} = \alpha_1 \vec{P_1P_2} + \alpha_2 \vec{P_1P_3}$$

Observación 4 En principio tenemos un vector de referencia en término de otros dos, sin embargo, esos vectores tienen un punto de origen O, luego, con especto a ese punto de origen podemos representar las coordenadas del punto P en érminos de los otros tres $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, esas son las coordenadas baricéntricas del punto P con respecto a P_1, P_2 y P_3

3.4 Coordenadas baricéntricas y la ecuación del plano

En $\mathbb{R}^3$ podemos hacer uso de las coordenadas baricéntricas para encontrar la ecuación del plano que describen 3 puntos P_1, P_2 y P_3 no colineales.

La idea es elemental, fijemos un punto de referencia digamos P_1 y consideremos dos vectores $\vec{V_1}$ y $\vec{V_2}$ de referencia, digamos $\vec{P_1P_2}$ y $\vec{P_1P_3}$

Dado un punto $P(x, y, z$ en el plano, se cumple que

$$\vec{P_1P} = \alpha_1 \vec{P_1P_2} + \vec{P_1P_3}$$

Ejemplo 5 Considere los puntos $P_1(2,3)$, $P_2(0,-4)$ y $P_3(1,1)$, exprese el punto$P(2,4)$ en término de estos tres.

Por una parte, tenemos que $\vec{P_1P} = (0,1)$, $\vec{P_1P_2} = (-2,-7)$, $\vec{P_1P_3} = (-1,7)$

$$\begin{aligned}
\vec{P_1P} &= \alpha_1 \vec{P_1P_2} + \alpha_2 \vec{P_1P_3} \\
(0,1) &= \alpha_1(-2,-7) + \alpha_2(-1,7) \\
&= (-2\alpha_1 - \alpha_2, -7\alpha_1 + 7\alpha_2)
\end{aligned}$$

lo que nos conduce al sistema

$$
\begin{aligned}
-2\alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\
-7\alpha_1 + 7\alpha_2 &= 1
\end{aligned}
$$

resolviendo tenemos $\alpha_1 = -1/21$, $\alpha_2 = 2/21$. Con lo cual el punto P con respecto a los vectores $\vec{P_1P_2}$, $\vec{P_1P_3}$ es $P(-1/21, 2/21)$.

Problema 9 Consideremos los puntos $P_1(0,-1,1)$, $P_2(1,2,-3)$ y $P_3(4,4,200)$. Determine un punto $P(x,y,z)$ en el plano de estos puntos.

La idea es simple, tomemos un punto de referencia, digamos P_1 y consideremos vectores hacia P_2 P_3, la idea es representar el vector P_1P en término de estos dos

$$
\vec{P_1P} = \alpha_1 \vec{P_1P_2} + \alpha_2 \vec{P_1P_3}
$$

por una parte tenemos

$$
\begin{aligned}
\vec{P_1P} &= (x,y,z) - (0,-1,1) = (x, y+1, z-1) \\
\vec{P_1P_2} &= (1,2,-3) - (0,-1,1) = (1,3,-4) \\
\vec{P_1P_3} &= (4,4,200) - (0,-1,1) = (4,5,199)
\end{aligned}
$$

así

$$
\begin{aligned}
(x, y+1, z-1) &= \alpha_1(1,3,-4) + \alpha_2(4,5,199) \\
&= (\alpha_1 + 4\alpha_2, 3\alpha_1 + 5\alpha_2, -4\alpha_1 + 199\alpha_2)
\end{aligned}
$$

con esto

$$
\begin{aligned}
x &= \alpha_1 + 4\alpha_2 \\
y &= 3\alpha_1 + 5\alpha_2 - 1 \\
z &= -4\alpha_1 + 199\alpha_2 + 1
\end{aligned}
$$

dándole valores a α_1 y α_2 obtenemos puntos del plano, esta es la representación implícita del plano.

Trabajo 3 Encuentre la ecuación del plano que pasa por $P_1(0,-1,1)$, $P(1,2,-3)$ y $P_3(4,4,200)$ y comprobar que para cualquier α_1, α_2

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 + 4\alpha_2 \\ y &= 3\alpha_1 + 5\alpha_2 - 1 \\ z &= -4\alpha_1 + 199\alpha_2 + 1 \end{aligned}$$

es un punto del plano

Capítulo 4

Ecuación del plano y la línea

4.1 Representación de un punto en el plano

Problema 10 Dado tres puntos P_1, P_2 y P_3, podemos representar a un punto P del plano que describen

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \vec{P_1} + \alpha \vec{P_1P_2} + \beta \vec{P_1P_3} \\ &= \vec{P_1} + \alpha(\vec{P_2} - \vec{P_1}) + \beta(\vec{P_3} - \vec{P_1}) \\ &= (1 - \alpha - \beta)\vec{P_1} + \alpha\vec{P_2} + \beta\vec{P_3}\end{aligned}$$

a partir de P_1 o bien, a partir de P_2

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \vec{P_2} + \alpha' \vec{P_2P_1} + \beta' \vec{P_2P_3} \\ &= \vec{P_2} + \alpha'(\vec{P_1} - \vec{P_2}) + \beta'(\vec{P_3} - \vec{P_2}) \\ &= \alpha'\vec{P_1} + (1 - \alpha' - \beta')\vec{P_2} + \beta'\vec{P_3}\end{aligned}$$

o bien, a partir de P_3

$$
\begin{aligned}
\vec{P} &= \vec{P}_3 + \alpha'' P_3\vec{P}_1 + \beta'' P_3\vec{P}_2 \\
&= \vec{P}_2 + \alpha''(\vec{P}_1 - \vec{P}_3) + \beta''(\vec{P}_2 - \vec{P}_3) \\
&= \alpha''\vec{P}_1 + +\beta''\vec{P}_2 + (1 - \alpha'' - \beta'')\vec{P}_3
\end{aligned}
$$

O bien, de manera general

$$\vec{P} = \alpha P_1 + \beta p_2 + \gamma P_3$$

con

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

Resultado 2 Si P está en el plano generado por los puntos P_1, P_2 y P_3, entonces existen números α, β y γ tales que $\alpha + \beta + \gamma = 1$ y

$$P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3.$$

Ejemplo 6 Consideremos los puntos $P_1(1, 2, -3)$, $P_2(0, -1, 2)$ y $P_3(4, 4, 200)$. Cómo determinar el plano que determinan.

Consideremos un punto de referencia, digamos P_1 y construyamos los vectores

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= P_2 - P_1 \\
\vec{b} &= P_3 - P_1
\end{aligned}
$$

calculemos un vector ortogonal a ambos, $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$, y con este vector tenemos

$$\vec{n} \cdot (P - P_1) = 0$$

que representa la ecuación del plano en forma implícita.

4.2 La línea recta

En el espacio, una recta $\mathcal{L}$ está definida por la intersección de dos planos no paralelos

$$\begin{aligned} \Pi_1 &: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \Pi_2 &: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}$$

escribimos $\mathcal{L} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$, es decir

$$\mathcal{L} = \{P(x, y, z)| \quad P \in \Pi_1 \text{ y } P \in \Pi_2\}$$

Ejemplo 7 Consideremos los planos

$$\begin{aligned} \Pi_1 &: 3x + 4y - 5z - 4 = 0 \\ \Pi_2 &: x + y - 2z + 2 = 0 \end{aligned}$$

El problema es encontrar la recta que definen esos planos (la intersección de los planos).

La idea es representar la recta en forma paramétrica

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + \alpha\vec{a}$$

El problema es identificar un punto P_0 de la recta y el vector dirección $\vec{a}$. Encontremos un punto P_0. Hagamos $z = 0$ en las ecuaciones del plano, esto nos conduce

$$\begin{aligned} 3x + 4y - 4 &= 0 \\ x + y + 2 &= 0 \end{aligned}$$

resolviendo este sistema, obtenemos las coordenadas de un punto sobre la recta $P_0(12, 10, 0)$.

Ahora bien, observemos la normal al plano Π_1: $\vec{n}_1(3,4,5)$ y la normal al plano Π_2: $\vec{n}_2(1,1,-2)$ y calculemos un vector ortogonal a ambos $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, con esto, tenemos la representación explícita de la recta que pasa por esos puntos.

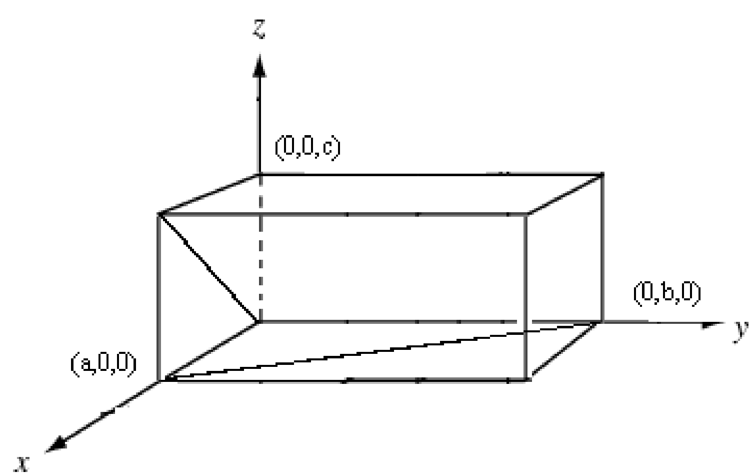
Ejemplo 8 Dado puntos $P_1(x_1, y_2, z_2)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, considere el vector dirección $\vec{a} = P_2 - P_1$ con esto, la recta que pasa por esos puntos es

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \alpha(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)$$

Problema 11 Nos interesa calcular la intersección de dos objetos geométricos

1. $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 =$? En ocasiones se intersectan y es un punto o toda la recta.
2. $\mathcal{L}_1 \cap \Pi =$? Las más de las veces y es o bien un punto o bien, toda la recta.
3. $\Pi_1 \cap \Pi_2 =$? Las más de las veces, y es una recta, el plano, o bien si son paralelos, nada.

Trabajo 4 Considere el paralepípedo formado por lo puntos $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ y $(0,0,c)$, como en la figura siguiente



encuentre la distancia entre la diagonal $\overline{(a,0,0)(0,b,0)}$ y la diagonal $\overline{(0,0,0)(a,0,c)}$.

Capítulo 5

Familias de rectas

En muchas ocasiones es conveniente observar una recta, como elemento de una familia de rectas. Por ejemplo, consideremos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &: 3x + 2y - 4 = 0 \\ \mathcal{L}_2 &: x + y + 5 = 0 \end{aligned}$$

si (x_0, y_0) es el punto de intersección, la pregunta que nos compete es cómo es la familia de rectas que pasan por (x_0, y_0).

Una forma, es representarla en términos de los escalares A y B

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Ahora bien, si de entre todas aquellas deseamos la que pasa por (x_1, y_1), tenemos

$$A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) = 0$$

con esto,

$$\frac{A}{B} = -\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Si observamos la recta $y = y_0$, esta pasa por el punto (x_0, y_0) asícomo la recta $x = x_0$. Se tiene la forma de una combinación entre rectas

$$A\mathcal{L}_1 + B\mathcal{L}_2 = 0$$

En general, cualesquiera rectas que pasen por (x_0, y_0) se pueden escribir en términos de dos rectas que pasen por ese punto.

Observemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(x,y) &: 3x + 2y - 4 = 0 \\ \mathcal{L}_2(x,y) &: x + y + 5 = 0 \end{aligned}$$

y consideremos la familia de rectas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x,y) &= k_1\mathcal{L}_1(x,y) + k_2\mathcal{L}_2(x,y) \\ &= k_1(3x + 2y - 4) + k_2(x + y + 5) \\ &= (3k_1 + k_2)x + (2k_1 + k_2)y + (-4k_1 + 5k_2) \end{aligned}$$

Si (x_0, y_0) es el punto de intersección de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_0,y_0) &= k_1\mathcal{L}_1(x_0,y_0) + k_2\mathcal{L}_2(x_0,y_0) \\ &= k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Si deseo la recta que pasa por $(0,0)$, debo encontrar k_1 y k_2, de tal forma que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(0,0) &= k_1\mathcal{L}_1(0,0) + k_2\mathcal{L}_2(0,0) \\ &= -4k_1 + 5k_2 = 0 \end{aligned}$$

eligiendo $k_1 = 5$ y $k_2 = 4$, tendremos que

$$\mathcal{L}(x,y) = 5\mathcal{L}_1(x,y) + 4\mathcal{L}_2(x,y) = 0$$

describe a la recta que pasa por el punto de intersección (x_0, y_0) y $(0,0)$.

5.1 Familia de planos

Ahora bien, consideremos dos planos

$$
\begin{aligned}
\Pi_1(x,y,z) &: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\
\Pi_2(x,y,z) &: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0
\end{aligned}
$$

La recta de intersección de esos puntos

$$\mathcal{L}_\Pi \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \text{tales que } \Pi_1(x,y,z) = 0 \text{ y } \Pi_2(x,y,z) = 0\right\}$$

Ahora bien, la familia de planos

$$\Pi(x,y,z) = k_1\Pi_1(x,y,z) + k_2\Pi_2(x,y,z) = 0$$

pasa por la recta $\mathcal{L}_\Pi$. Con esto decimos que si $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) \in \mathcal{L}_\Pi$, entonces $\Pi_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = 0$ y $\Pi_2(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = 0$, asíuna forma de caracterizar al punto $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ es a través de la familia de planos

$$\Pi(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = k_1\Pi_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) + k_2\Pi_2(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = 0$$

Observación 5 Un objeto puede verse de distintas maneras, por ejemplo

1. Un punto P puede ser descrito por una familia de rectas

$$P = k_1\mathcal{L}_1 + k_2\mathcal{L}_2$$

2. Una circunferencia

$$x^2 + y^2 = 1$$

lo podemos ver como dado (x_1,y_1) sobre la circunferencia, hablar de la recta tangente a la circunferencia en (x_1,y_1).

Con esto estamos asociando un punto por sus coordenadas, una línea por su ecuación. La idea es observar un punto como intersección de rectas.

Ejemplo 9 $Ax + By = 0$ es la ecuación de un punto, el origen, porque dado cualesquiera A, B tenemos una recta que pasa por $(0, 0)$.