Geometría Analítica II

Lectura 9

Ayudante: Guilmer González — Día 5 de abril, 2005

El día de hoy veremos:

0. Comentarios sobre los trabajos últimos.

2. Matrices y la forma cuadrática.

Habiendo dado una revisión breve de matrices y producto escalar de vectores, pasemos a observar las cónicas mediante una representación matricial.

Es fácil observar, que la ecuación $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ puede escribirse en la forma

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0$$

que escrito de manera compacta

$$\mathbf{x}^t A \mathbf{x} + b^t x + f = 0$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

aquí $\mathbf{x}^t A \mathbf{x}$ se conoce como la forma cuadrática en dos variables.

Caso 1: $b = \mathbf{0}$

a) Escriba la ecuación en la forma $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} + f = 0$, donde A es una matriz real y simétrica.

b) Encuentre una matriz P que diagonalice a A de manera tal que $\det(P) = 1$

c) Sustituya $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ para transformar la ecuación a

$$(\mathbf{x}')^t P^t A P \mathbf{x}' + f = (\mathbf{x}')^t D \mathbf{x}' + f = \alpha(\mathbf{x}')^2 + \beta(\mathbf{y}')^2 + f = 0$$

donde D tiene por entradas en la diagonal α y β.

d) Reagrupe la ecuación última para identificar la cónica.

Observación: Si P es ortogonal y $\det(P) = 1$, entonces P es una rotación

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Caso 1: $b \neq \mathbf{0}$

De manera análoga al caso anterior, podemos hacer los pasos a) a c), y entonces obtener

$$\alpha(\mathbf{x}')^2 + \beta(\mathbf{y}')^2 + d^t P\mathbf{x}' + f = 0$$

que escrito de manera escalar, tenemos

$$\alpha(\mathbf{x}')^2 + \beta(\mathbf{y}')^2 + c'x' + d'y' + f = 0$$

d) Complete el cuadrado, para obtener

$$\alpha(x' - x_0)^2 + \beta(y' - y_0)^2 = f'$$

e) Haga el cambio $x'' = x' - x_0$, $y'' = y' - y_0$ y reagrupe en la forma canónica de las cónicas.

En 3D, tenemos

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix}$$