Geometría Analítica II

Lectura 8

Ayudante: Guilmer González — Día 17 de marzo, 2005

El día de hoy veremos:

0. Comentarios sobre los trabajos últimos.
2. Rotaciones y traslaciones.

1 Un sistema coordenado útil para el avioncito

Consideremos un objeto en el espacio, en $\mathbb{R}^3$ y veamos cómo llevar a cabo algunas transformaciones sobre de el.

Observemos un problema real. El piloto de un avión desea hacerlo descender en la Ciudad de México, cómo podemos ayudarle a lograrlo, cómo hacerle entender al piloto los movimientos para lograr el descenso.

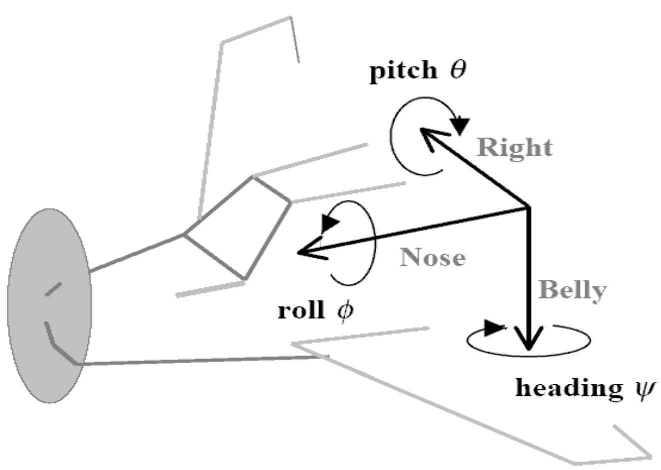

Figura 1: Un sistema coordenado local para el avión.

En particular, consideremos un avioncito, y otorguémosle un sistema coordenado local. La idea es la siguiente: el avioncito puede desplazarse por todo el espacio, esa sería una traslación del objeto des un lugar inicial. Ahora bien, olvidemos dónde se encuentra y veamos cómo lo podemos "mover".

Si nos fijamos a lo largo del avioncito, éste puede dar giros sobre este eje *nose* eje. Ahora, si nos fijamos a lo largo de las alas, el avioncito lo podemos hacer girar al rededor de este eje *right* de manera que busquemos descender o ascender. Por último observemos un eje perpendicular al eje del avión y hacia abajo, si nosotros damos rotaciones al rededor de este este eje, estaremos básicamente dando giros hacia la izquierda o a la derecha del avión.

Con esto, podemos olvidarnos por un momento de la posición que ocupa el avioncito en el espacio, y hablar del movimiento que ha llevado a cabo el piloto para descender, virar a la derecha y dar un giro sobre su eje y entonces disponerse a aterrizar.

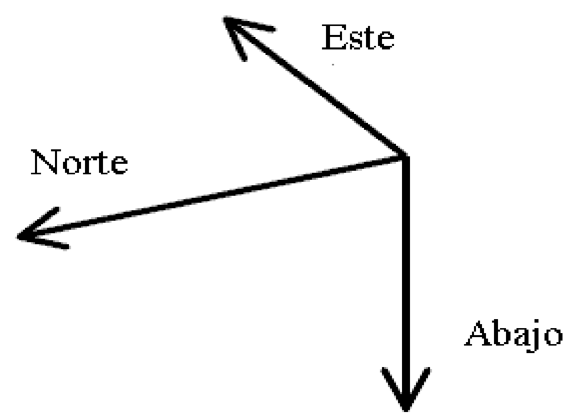

Figura 2: Un sistema coordenado local.

La pregunta ahora, es cómo expresar el movimiento llevado a cabo en términos matriciales.

2 Rotaciones en el plano

Regresemos al plano. Supongamos que se cuenta con nuestro sistema xy usual y un punto A de coordenadas (x_A, y_A). El problema es rotar nuestro sistema un ángulo α en orientación positiva, esto es contrario a las manecillas del reloj. Observe la gráfica

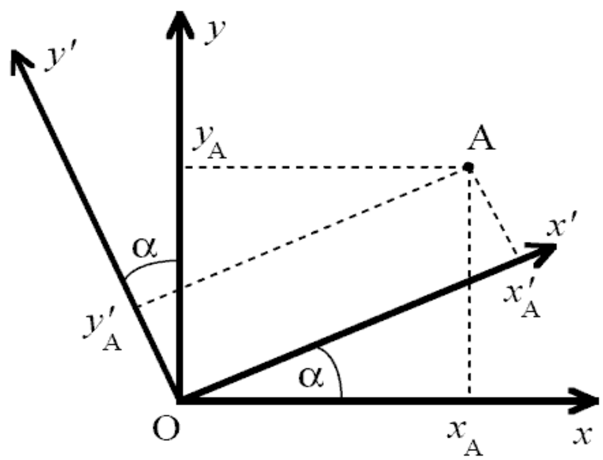

Figura 3: Rotando un sistema.

La idea es transformar nuestras coordenadas usuales al nuevo sistema, esto se escribe como

$$(x_A, y_A) \mapsto (x'_A, y'_A)$$

esta transformación la escribimos de manera escalar como

$$\begin{aligned} x'_A &= x_A \cos\alpha + y_A \text{sen } \alpha \\ y'_A &= -x_A \text{sen } \alpha + y_A \cos\alpha \end{aligned}$$

Esta expresión puede ser obtenida de diferentes maneras, la tradicional es considerar las partes en que podemos escribir x'_A por ejemplo, en términos de una porción de x_A y de y_A. Otra es considerando una base para este sistema por $v_1 = (\cos\alpha, -\text{sen } \alpha)$ y $v_2 = (\cos\alpha, \text{sen } \alpha)$.

Lo que en términos matriciales se expresa como

$$\begin{pmatrix} x'_A \\ y'_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen }\alpha \\ -\text{sen }\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$$

Ahora bien, si contamos contamos con nuestros ejes X'_A y Y'_A y deseamos encontrar la transformación que nos lleve bajo una rotación al sistema original, debemos aplicar

$$\begin{aligned} x_A &= x'_A \cos\alpha - y_A \text{sen }\alpha \\ y_A &= x_A \text{sen }\alpha + y_A \cos\alpha \end{aligned}$$

Lo que en términos matriciales se expresa como

$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen }\alpha \\ \text{sen }\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_A \\ y'_A \end{pmatrix}$$

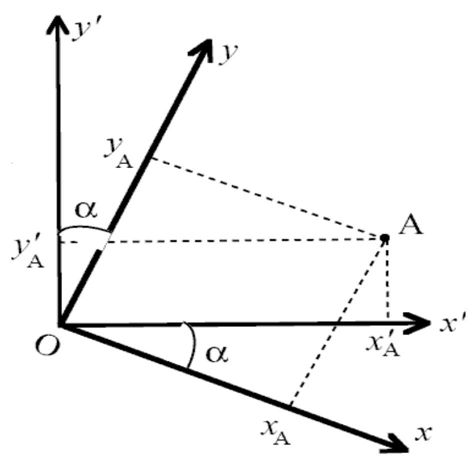

Figura 4: Regresando al sistema original.

Entendiendo cómo expresar nuestras rotaciones en 2D, podemos ahora echar un vistazo a lo que ocurre en 3D.

3 Rotaciones en 3D

Observemos primero rotaciones elementales, que de manera directa podemos describir a partir del plano. Si nosotros fijamos el eje Z, y solamente llevamos a cabo rotaciones sobre el plano $\Pi_X Y$, una rotación a un ángulo θ lo escribimos como

$$R_Z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen }\theta & 0 \\ \text{sen }\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

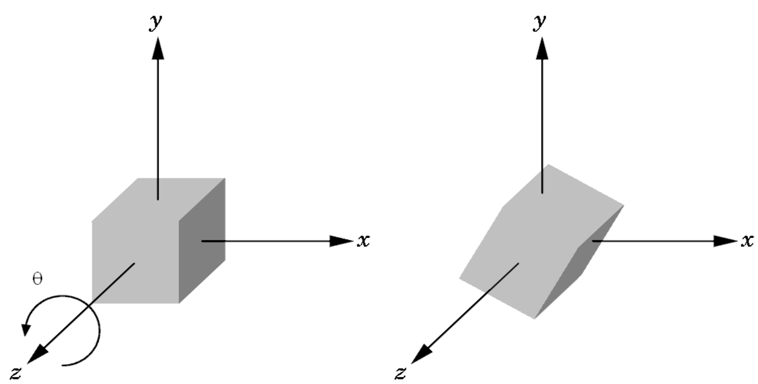

Figura 5: La rotación $R_Z(\theta)$

`Observar que al aplicarlo a un punto` P`, no se altera la coordenada` z`.`

Ahora, por simetría observemos las rotaciones elementales que podemos obtener cuando fijamos el eje X

$$R_X(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\text{sen }\phi \\ 0 & \text{sen }\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

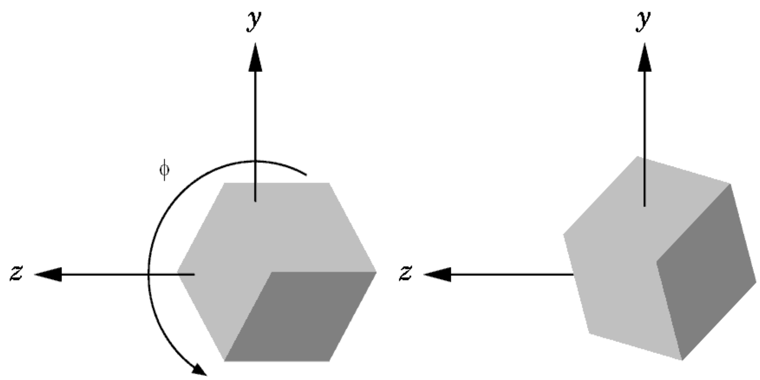

Figura 6: La rotación $R_X(\phi)$

y ahora si fijamos el eje Y

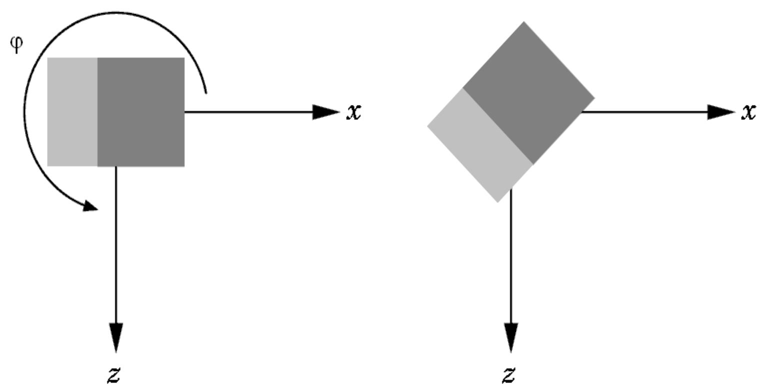

Figura 7: La rotación $R_Y(\varphi)$

$$R_Y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \operatorname{sen}\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Con esto, podemos entonces representar una rotación en el espacio, considerandolo como una serie de rotaciones sobre los ejes.

`Hacer comentarios y los cálculos pertinentes.`

4 Reflexiones en 3D y cosas interesantes

Otro tipo de transformaciones que se pueden ver como rotaciones, son las reflexiones con respecto a un plano.

Por ejemplo, si contamos con un punto $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, y deseamos encontrar el punto al ser reflejado este sobre el plano YZ, las coordenas yz no se alteran y la coordenada en x cambia de direción, esto se escribe aplicando la matriz de transformación

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La corrrespondiente matriz de transformación obtenida al llevar a cabo una reflexión en el plano XZ se escribe como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y de manera directa la que corresponde al reflejar un punto sobre el plano XY

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora observemos la reflexión con respecto al orignen, esta la escribimos como

$$-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La cual pude obtenerse como una rotación de 180° seguida de una reflexión en el plano xy. O bien, ir reflejando sobre cada plano. Observe que el único punto que permanece fijo en esta transformación es el origen.

Otra rotación comunmente usada, es cuando el eje X lo mandamos al eje Y, cuando este lo enviamos al eje Z y el eje Z lo hacemos corresponder con X, esta rotación se escribe como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

en este caso la matriz de transformación esta dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

`Hacer algunos comentarios sobre el uso computacional de estas matrices en un problema de visualización gráfica.`