Geometría Analítica II

LECTURA 7

Ayudante: Guilmer González Día 15 de marzo, 2005

El día de hoy veremos:

0. Comentarios sobre los trabajos últimos.

2. La ecuación de una circunferencia en el espacio.

1 La Circunferencia en el espacio

En $\mathbb{R}^2$ tenemos idea de cómo describir una circunferencia a través de su ecuación, por ejemplo de forma implícita

$$x^2 + y^2 = r^2$$

y de manera explícita por la parametrización

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Ahora el problema es describirlo en $\mathbb{R}^3$.

Sugerencia: Una curva en $\mathbb{R}^3$ puede observarse como la intersección de dos superficies.

Ejemplo: Considere el cilindro descrito por

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \mid \quad x^2 + y^2 = 1, z \in \mathbb{R}\right\}$$

y el plano

$$\Pi = \{(x, y, z), | \quad z = 1\}$$

Veamos una idea general, cuando deseamos que la circunferencia viva en un plano Π específico.

Ejercicio: Considere el plano

$$\Pi = \{(x, y, z)| \quad x + y + z = 1\}$$

y un punto (x_0, y_0, z_0) en el plano es el centro de la circunferencia de radio r. Encontremos la ecuación que describe esa circunferencia.

Idea general. Sobre $P_0(x_0, y_0, z_0)$ construir un sistema coordenado ortogonal local.

Consideremos un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ distinto al primero y sobre el plano. Observemos el vector

$$P_0\vec{P}_1 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

Como ambos puntos pertenecen al plano, tenemos que

$$(x_1 - x_0) + (y_1 - y_0) + (z_1 - z_0) = 0$$

Sin pérdida de generalidad, consideremos $z_1 = z_0$, con esto

$$x_1 - x_0 = -(y_1 - y_0)$$

consideremos $y_1 = 0$ y rsolvamos para x_0, obteniendo que $x_1 = x_0 + y_0$, así, hemos obtenido

$$P_1(x_0 + y_0, 0, z_0)$$

y el vector

$$P_0\vec{P}_1 = (y_0, -y_0, z_0)$$

Ahora, construyamos un punto $P_2(x_2, y_2, z_2)$ en el plano, de tal forma que $\vec{P_0P_2}$ sea ortogonal a $\vec{P_0P_1}$.

Por una parte necesitamos que

$$\begin{aligned}
\vec{P_0P_2} \cdot \vec{P_0P_1} &= 0 \\
&= (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0) \\
&= y_0(x_2 - x_0) - y_0(y_2 - y_0) = 0
\end{aligned}$$

de donde se desprende que

$$x_2 - x_0 = y_2 - y_0.$$

Tomando $x_2 = 0$, tenemos que $y_2 = y_0 - x_0$. Ahora bien, como $P_2 \in \Pi$, se sigue

$$x_2 + y_2 + z_2 = 1$$

de todo esto, $z_2 = 1 + x_0 - y_0$. Con lo cual, hemos obtenido el punto $P_2(0, y_0 - x_0, 1 + x_0 - y_0)$ y el vector $\vec{P_0P_2} = (-x_0, -x_0, 2x_0)$.

Con el sistema de referencia ortogonal $\{\vec{P_0P_1}, \vec{P_0P_2}\}$ podemos definir un punto P que satisfaga la propiedad de la circunferencia. Para lograrlo de manera eficiente, normalicemos esos vectores

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{\|\vec{P_0P_1}\|}(y_0, -y_0, 0) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}|y_0|}(y_0, -y_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) \\
v_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}|x_0|}(-x_0, -x_0, 2x_0) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)
\end{aligned}$$

Con esto, cualquier punto P en el plano, puede observarse como

$$P(\alpha,\beta) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) + \beta\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)$$

Esto es

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha - \frac{1}{\sqrt{6}}\beta \\
y &= y_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha - \frac{1}{\sqrt{6}}\beta \\
z &= z_0 + \frac{2}{\sqrt{6}}\beta
\end{aligned}$$

Por consiguiente, si deseamos los puntos P sobre la circunferencia de radio 1, debemos pedir que

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Esto sigue de la necesidad de que $\|P_0 - P\| = r^2$

$$\begin{aligned}
\|P_0 - P\| &= \|\alpha v_1 + \beta v_2\|^2 \\
&= \alpha^2 + \beta^2 = r^2
\end{aligned}$$

Esta sería una representación de la circunferencia en el plano.

Si observamos la relación para α y β, podemos fácilmente reemplazarla por el coseno y seno del ángulo θ formado a partir de un eje local, por ejemplo $P_0\vec{P}_1$.

$$\begin{aligned}
\alpha &= r\cos\theta \\
\beta &= r\text{sen }\theta
\end{aligned}$$

Con esto, obtenemos otra respresentación para esa circunferencia, a saber

$$P(\alpha,\beta) = (x_0, y_0, z_0) + \cos\theta\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) + \text{sen }\theta\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)$$

logrando la relación

$$\begin{aligned}
x - x_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{6}}\text{sen }\theta \\
y - y_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{6}}\text{sen }\theta \\
z - z_0 &= \frac{2}{\sqrt{6}}\text{sen }\theta
\end{aligned}$$

Ahora, intentemos observar la clase de curvas que se obtienen cuando proyectamos esta circunferencia sobre los planos XY, YZ y XZ.

De las dos primeras relaciones, es fácil ver que

$$\begin{aligned}
(x - x_0) + (y - y_0) &= -\frac{2}{\sqrt{6}}\text{sen }\theta \\
(x - x_0) - (y - y_0) &= \frac{2}{\sqrt{2}}\cos\theta
\end{aligned}$$

lo que escribimos como

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\sqrt{2}}{2}[(x - x_0) - (y - y_0)] \\
\text{sen }\theta &= -\frac{\sqrt{6}}{2}[(x - x_0) + (y - y_0)]
\end{aligned}$$

y con esto, expresamos

$$\frac{3}{4}[(x - x_0) - (y - y_0)]^2 + \frac{6}{4}[(x - x_0) + (y - y_0)]^2 = 1$$

si desarrollamos, llegamos a una expresión del estilo

$$2 = 4x^2 + 4y^2 + 4xy + 12x + 12y + 12$$

lo cual puede comprobarse de manera rápida que representa una elipse.

OTRA FORMA

`Hacer algunos comentarios`