Geometría Analítica II

LECTURA 5

Ayudante: Guilmer González Día 3 de marzo, 2005

El día de hoy veremos:

0. Comentarios sobre los trabajos últimos.

2. Sobre el cambio de coordenadas.

1 Cambio de coordenadas

COnsideremos los puntos $P_0(0,-1)$, $P_1(2,0)$, $P_2(-1,1)$, y $Q_0(2,2)$, $Q_1(-1,4)$ y $Q_2(0,-3)$. Para la colección $\{P_0, P_1, P_2\}$ tenemos una representación para P, en $\{Q_0, Q_1, Q_2\}$ tenemos una representación para el mismo punto. La idea es observar una reprsentación de un conjunto en otro.

Consideremos los tres puntos $P_0(0,-1)$, $P_1(2,0)$ y $P_2(-1,1)$. La idea es representar $P_0\vec{P}$ en términos de $P_0\vec{P}_1$ y $P_0\vec{P}_2$. Para lograrlo, observemos a $P_0\vec{P}$ como suma de vectores

$$\begin{aligned} P_0\vec{P} &= P_0\vec{O} + \vec{OP} \\ &= (0,1) + (x,y) \\ &= (x, y+1) \end{aligned}$$

el cual podemos expresarlo como combinación lineal entre $P_0\vec{P}_1$ y $P_0\vec{P}_2$

$$\begin{aligned} (x, y+1) &= \alpha P_0\vec{P}_1 + \beta P_0\vec{P}_2 \\ &= \alpha(2,1) + \beta(-1,2) \\ &= (2\alpha - \beta, \alpha + 2\beta) \end{aligned}$$

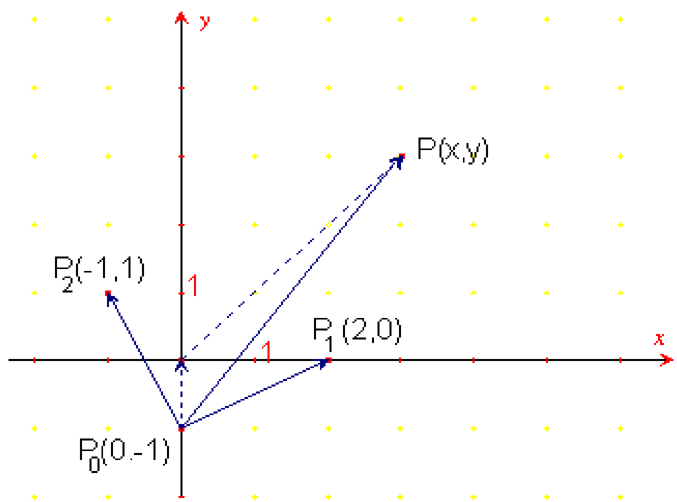

Figura 1: Un sistema de referencia para P.

con esto, logramos el sistema

$$\begin{aligned} x &= 2\alpha - \beta \\ y &= \alpha + 2\beta - 1 \end{aligned}$$

Resolviendo para α y β tenemos

$$\begin{aligned} \alpha &= 2/5x + 1/5y + 1/5 \\ \beta &= -1/5x + 2/5y + 2/5 \end{aligned}$$

esto nos permite pasar de un sistema de coordenadas a otro de manera adecuada. Es decir, si tenemos la posición de $P(x, y)$, tenemos los valores correspondientes en el sistema $\{P_0\vec{P}_1, P_0\vec{P}_2\}$.

Ahora, observemos una representación para P, en $\{Q_0, Q_1, Q_2\}$. Para luego observar una representación de un conjunto en otro.

De nueva cuenta, representamos $\vec{OP}$ como

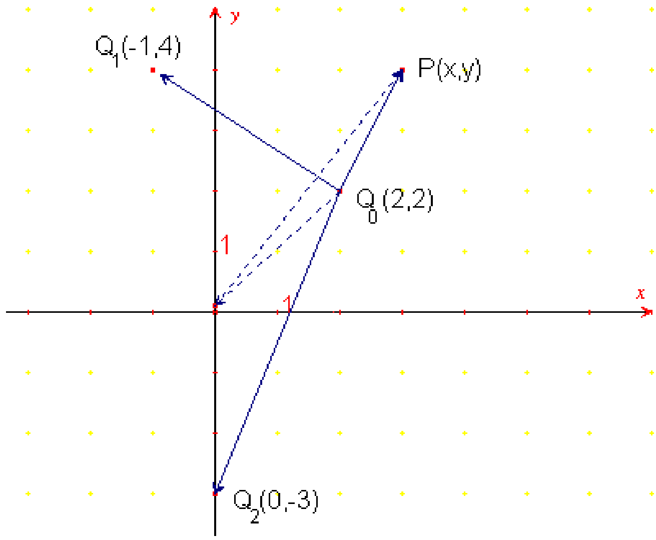

Figura 2: Otro sistema de referencia para P.

$$
\begin{aligned}
\vec{Q_0P} &= \vec{Q_0O} + \vec{OP} \\
&= (-2,-2) + (x,y) \\
&= (x-2, y-2) \\
&= \alpha_1 \vec{Q_0Q_1} + \beta_1 \vec{Q_0Q_2} \\
&= \alpha_1(-3,2) + \beta_1(-2,-5) \\
&= (-3\alpha_1 - 2\beta_1, 2\alpha_1 - 5\beta_1)
\end{aligned}
$$

obteniendo el sistema

$$
\begin{aligned}
x &= -3\alpha_1 - 2\beta_1 + 2 \\
y &= 2\alpha_1 - 5\beta_1 + 2
\end{aligned}
$$

El cual podemos resolver para α_1 y β_1, para entonces si tenemos la posición de $P(x,y)$, tenemos los valores correspondientes en el sistema $\{\vec{Q_0Q_1}, \vec{Q_0Q_2}\}$.

Ahora, si observamos nuestra representación para P tenemos

$$
\begin{aligned}
\beta &= -1/5x + 2/5y + 2/5 \\
\alpha &= 2/5x + 1/5y + 1/5
\end{aligned}
$$

tendremos una representación de nuestro sistema entre las $P's$ y las $Q's$

$$
\begin{aligned}
\beta &= -1/5(3\alpha_1 - 2\beta_1 + 2) + 2/5(2\alpha_1 - 5\beta_1 + 2) + 2/5 \\
\alpha &= 2/5(-3\alpha_1 - 2\beta_1 + 2) + 1/5(2\alpha_1 - 5\beta_1 + 2) + 1/5
\end{aligned}
$$

así

$$
\begin{aligned}
\beta &= 7/5\alpha_1 - 8/5\beta_1 + 4/5 \\
\alpha &= -4/5\alpha_1 - 9/5\beta_1 + 7/5
\end{aligned}
$$

El cual podemos resolver para α_1 y β_1 y pasar de un sistema de referencia a otro.

Ahora, observemos una interpretación a lo que estamos haciendo. Fijemos el valor de α, digamos $\alpha = 1$ y barramos β en el sistema de coordenadas para P en término de los vectores $\{P_0\vec{P}_1, P_0\vec{P}_2\}$, qué significado le damos, cuando fijamos un valor de α? `Preguntar a la clase, trazar rectas`.

Ahora que hemos fijado a α, observemos un valor para β, digamos -1. El punto P cómo queda representado en el sistema de referencia $\{Q_0\vec{Q}_1, Q_0\vec{Q}_2\}$? `Preguntar a la clase, hacer comentarios, trazar rectas`.

Ahora, observemos cómo es transformado el espacio "visto" por $\{P_0\vec{P}_1, P_0\vec{P}_2\}$ al espacio "visto" por $\{Q_0\vec{Q}_1, Q_0\vec{Q}_2\}$.

`Hacer algunos comentarios`

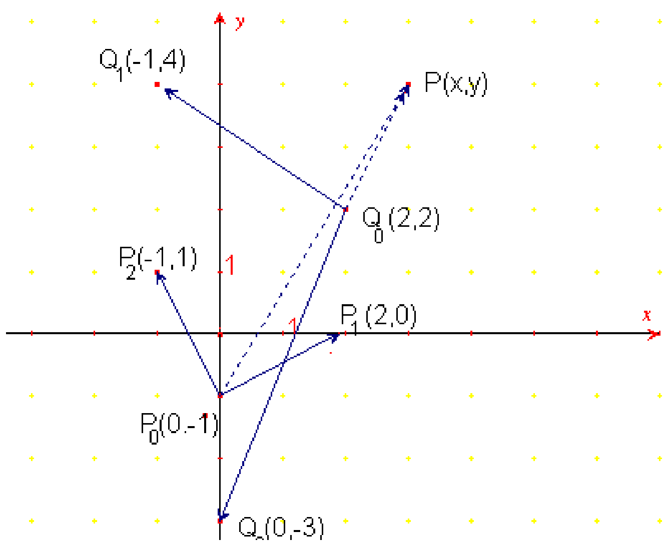

Figura 3: Dos sistemas de referencia para P.