Geometría Analítica II

LECTURA 12

Ayudante: Guilmer González | Día 17 de mayo, 2005

El día de hoy veremos:

1. Comentarios sobre los temas vistos para el examen.
2. Sobre los ejes principales y su uso.

La ecuación general de una cuádrica es de la forma

$$\alpha_{11}x^2+\alpha_{22}y^2+\alpha_{33}z^2+2\alpha_{12}xy+2\alpha_{23}yz+2\alpha_{13}xz+\beta_1x+\beta_2y+\beta_3z+\gamma=0$$

en términos matriciales esto lo escribimos como

$$(x,y,z)\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{12}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{13}&\alpha_{23}&\alpha_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\gamma=0$$

El lado izquierdo, representa una función cuádrica para (x,y,z). La cual que puede ser escrita de manera compacta como

$$\mathbf{x}^tA\mathbf{x}+b^t\mathbf{x}+\gamma=0$$

donde $\mathbf{x}^tA\mathbf{x}$ es llamada la forma cuádrica de dicha ecuación.

Ejemplo: Si consideremos la ecuación

$$4x^2+4y^2+4z^2+2xy+2yz+2xz-x-y-z=0$$

lo cual puede ser escrito como

$$(x,y,z)\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + (-1,-1,-1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La forma cuádrica asociada a esta ecuación es $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

El Teorema de Ejes Principales, nos asegura poder obtener un cambio de coordenadas $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ de forma tal que la forma cuádrica $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ la transforma a $\mathbf{x}^t D\mathbf{x}$, donde D es una matriz diagonal, La matriz D tiene por entrada los valores característicos de A. La matriz P hace un cambio de variables, de x_1, x_2, x_3 a y_1, y_2, y_3, obteniendo una expresión más sencilla

$$\mathbf{y}^t D\mathbf{y} + b^t P\mathbf{y} + \gamma = 0$$

Olvidemos la parte lineal de la cuádrica, y trabajemos sobre la forma cuádrica.

La idea es resolver el problema

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

No olvidemos que aquí el tamaño del vector no importa.

Considerando en $3D$, este problema nos lleva a resolver el sistema

$$\begin{aligned} 4x + y + z &= \lambda x \\ x + 4y + z &= \lambda y \\ x + y + 4z &= \lambda z \end{aligned}$$

el cual puede ser escrito como

$$
\begin{aligned}
(4-\lambda)x + y + z &= 0\\
x + (4-\lambda)y + z &= 0\\
x + y + (4-\lambda)z &= 0
\end{aligned}
$$

Para no contar con la solución directa $(0,0,0)$, debe ocurrir que

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

esto es

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

al determinate, se le conoce como el polinomio característico de la matriz A, en este caso

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 12\lambda^2 - 48\lambda + 63$$

el cual se puede obtener sus ceros, a través del método de Newton.

`Concluir el ejercicio en clase y mostrar el programa en Maple`