Geometría Analítica II

LECTURA 10

Ayudante: Guilmer González Día 6 de abril, 2005

El día de hoy veremos:

1. Comentarios sobre los temas vistos para el examen.
2. Sobre coordenadas baricéntricas y el teorema de Menelao.
3. Un procedimiento para calcular puntos armónicos.

Las coordenadas Baricéntricas nos permiten localizar un punto a partir de otros de referencia.

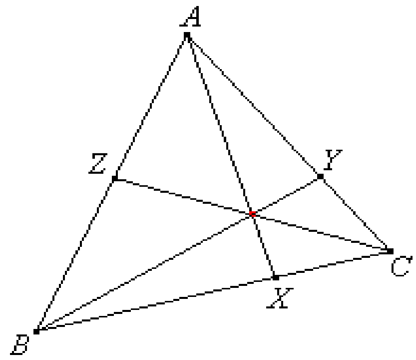
`Qué significado podemos darle al problema del balancín?` Desde el punto de vista físico: un problema de equilibrio, la búsqueda de "masas" adecuadas. En el plano de los vectores, una combinación lineal apropiada.

Este concepto de "combinación lineal convexa" puede ser extendida, de tal manera que un punto se encuentre fuera del segmento que definen dos puntos, usando de manera adecuada los "pesos" o "masas". Así dado dos puntos, sobre la recta que los definen podemos localizar cualquier punto.

Esta idea la extendemos al plano, de tal manera que dado tres puntos, podemos localizar a un punto P a partir de las "masas" asociadas a los vértices. O atacar el problema inverso, encontras las "masas" o coordenadas baricéntricas asociadas a los vértices dada la ubicación del punto. p.j. Para ubicar al punto de intersección de las medianas debemos asignarle un peso de 1/3 a cada vector.

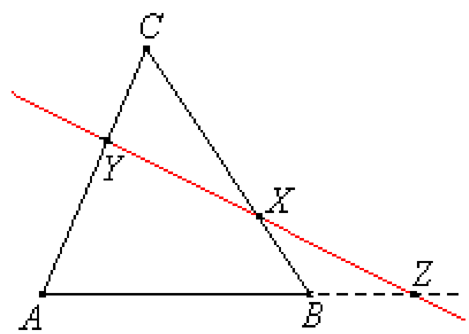
Esta idea, nos lleva a hablar de proporciones entre segmentos, y de ahí, sin mayor demora demostrar el Teorema de Ceva: Dado un triángulo $\triangle ABC$, si las tres cevianas AX, BY y CZ son concurrentes, entonces

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$$



Partiendo de esto, una condición de concurrencia, podemos lograr un criterio de alineación, el Teorema de Menelao: Sean X, Y y Z puntos respectivamente sobre los lados BC, AC y AB (o sus prolongaciones). Entonces, una condición necesaria y suficiente para que los puntos X, Y, Z estén alineados es que

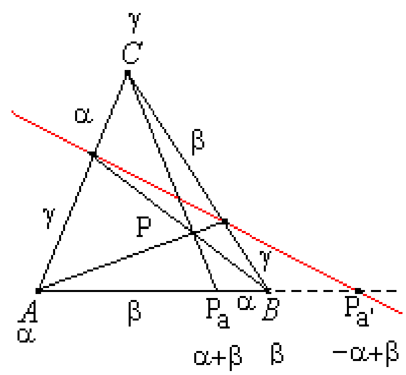
$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1$$



y esto lo pudimos demotrar usando las "masas" adecuadas para localizar los puntos X, Y, Z.

Con esta experiencia, veamos un procedimiento para calcular puntos armónicos sobre una línea.

Consideremos un triángulo, y tracemos las cevianas. Unamos dos pies de cevianas y prolonguemos para intersectar con el tercer lado del triángulo



De esta manera el punto P se puede localizar a través de las "masas" α, β y γ como

$$P = \alpha a + \beta B b + \gamma c$$

con $\alpha + \beta + \gamma = 1$

Por una parte se observa que

$$\begin{aligned} \frac{AP_a}{P_aB} &= \frac{\beta}{\alpha} \\ \frac{AP_{a'}}{P_{a'}B} &= -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha + \beta - \alpha}{-\alpha} \end{aligned}$$

con esto

$$\frac{P_aA}{AP_{a'}} = \frac{-\beta}{\beta + 2\alpha}$$

verificando

$$\frac{P_aB}{BP_{a'}} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$$

Así bien, escribimos

$$P_a = \frac{\beta a}{\alpha b}\alpha + \beta$$

$$P_{a'} = \frac{\beta a - \alpha b}{\beta - \alpha}$$

de estas dos ecuaciones tenemos

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta)P_a &= \beta a + \alpha b \\
(-\alpha + \beta)P_{a'} &= \beta a - \alpha b
\end{aligned}$$

obteniendo

$$(\alpha + \beta)P_a + (-\alpha + \beta)P_{a'} = 2\beta a$$

relación con la cual podemos obtener dado tres puntos, el tercero tal que los cuatro sean armónicos.