Geometría Analítica II

Lectura 1

Ayudante: Guilmer González — Día 8 de febrero, 2005

El día de hoy veremos:

0. Sobre cómo presentar los trabajos y cómo serán calificados.
1. Comentarios sobre vectores
2. Comentarios sobre coordenadas baricéntricas.
3. Forma paramétrica de una recta.
4. Noción de diatancia y cómo calcular la distancia entre dos líneas.
5. Algunos ejercicios sobre lugares geométricos.

1 Temas a manejar adecuadamente con vectores

1. Vectores definición y álgebra de vectores.
2. Un vector en término de vectores de referencia.
3. La regla del triángulo y regla del ciclo.
4. Usar vectores para encontrar la suma de fuerzas resultantes.
5. Las medianas de un triángulo.
6. Proyecciones, propiedades operaciones.
7. Producto interior o escalar, propiedades.
8. La ley del coseno, aprender a demostrarla, a interpretarla.

9. La ley del paralelogramo: la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales de un paralelogramo, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados.
10. Sobre las medianas, su magnitud.
11. El producto interior sin cálculo del ángulo.
12. Ortogonalidad, concepto y propiedades, resultados.
13. Ejercicios numéricos, operaciones, conceptos y diferencias.
14. El producto vectorial.
15. El área de un paralelogramo, la altura de un paralepípedo.
16. Ortonormalización de vectores.
17. Expresar un vector en términos de dos ortogonales.
18. Ejercicios numéricos.

2 Coordenada baricéntricas

Las coordenadas Baricéntricas nos permiten localizar un punto a partir de otros de referencia.

`Qué significado podemos darle al problema del balancín?` Desde el punto de vista físico: un problema de equilibrio, la búsqueda de "masas" adecuadas. En el plano de los vectores, una combinación lineal apropiada.

Este concepto de "combinación lineal convexa" puede ser extendida, de tal manera que un punto se encuentre fuera del segmento que definen dos puntos, usando de manera adecuada los "pesos" o "masas". Así dado dos puntos, sobre la recta que los definen podemos localizar cualquier punto.

Esta idea la extendemos al plano, de tal manera que dado tres puntos, podemos localizar a un punto P a partir de las "masas" asociadas a los vértices. O atacar el problema inverso, encontras las "masas" o coordenadas baricéntricas asociadas a los vértices dada la ubicación del punto. p.j. Para ubicar al punto de intersección de las medianas debemos asignarle un peso de 1/3 a cada vector.

3 Forma paramétrica de una línea

En $2D$ observamos que requerimos de un vector $\vec{a}$, el llamado vector de dirección y un punto Q sobre la recta para describir, mediante un parámetro α, los puntos P sobre la línea.

$$P = Q + \alpha\vec{a}$$

De manera práctica, podemos describir la línea que pasa por dos puntos de la siguiente forma:

> Sean P y Q dos puntos sobre una línea. $\vec{PQ} = Q - P$, es un vector que parte de P hacia Q. $t(Q-P)$ es un vector t veces $\vec{PQ}$.
>
> $$P + t(Q - P)$$
>
> para $-\infty < t < \infty$, describe la línea que pasa por P y Q.

Esta es la forma en que hemos trabajado la descripción de los puntos sobre una línea.

Una observación importante, es que esta representación de la línea que pasa por dos puntos, es independiente de la dimensión del problema. Trabaja tanto para 2D como para 3D, ye en general en $\mathbb{R}^n$.

Como observación, si el parámetro t es tal que $0 \leq t \leq 1$, tenemos una describición para los puntos que se encuentran entre P y Q.

Ejercicio: Describa lo puntos de la recta que pasan por $A(1, 2, 1)$ y $B(3, 1, 4)$.

4 Distancia entre dos rectas

Hemos aprendido a calcular distancia de un punto a una recta, y hacia un segmento de recta. Llegamos a una representación inmediata para la distancia de entre dos figuras F_1 y F_2

$$d(F_1, F_2) = \min_{P \in F_1 \; Q \in F_2} d(P, Q)$$

Un caso particular que nos compete, es el cálculo de la distancia entre dos rectas. Este es un problema muy interesante ya que desde un punto de vista computacional y práctico, es importante saber en qué momento dos puntos que siguen una trayectoria estarán lo más cercano posible. Esos puntos pueden representar barcos moviendose en cierta dirección o naves o aviones en distintos planos.

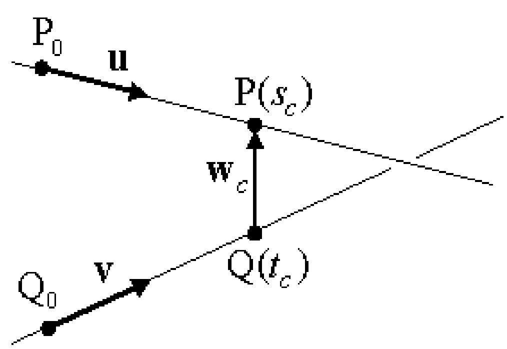
Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, nuestras rectas. Consideremos la forma vectorial de representar una recta; sea P_0 un punto de la recta $\mathcal{L}_1$, y Q_0 de la recta $\mathcal{L}_2$. Sea $\vec{u}$, el vector de dirección de la recta $\mathcal{L}_1$ y $\vec{v}$ el de la recta $\mathcal{L}_2$, con esto tenemos que

$$\begin{aligned} P(s) &= P_0 + s\vec{u}; \quad s \in \mathbb{R} \\ Q(t) &= Q_0 + t\vec{v}; \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$P(s)$ describe la línea $\mathcal{L}_1$ y $Q(t)$ describe la línea $\mathcal{L}_2$.

Consideremos $\vec{w}(s,t)$ el vector que va de un punto $Q(t)$ de $\mathcal{L}_2$ a un punto $P(s)$ en $\mathcal{L}_1$. La idea primera es encontrar $\vec{w}(s_c,t_c)$ que minimicen la magnitud de $\vec{w}(s,t)$, para cuales quiera s y t.

$$d(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2) = \min_{s,t} |\vec{w}(s,t)|$$



En la Lectura 19, del semestre pasado podemos encontrar un algoritmo para calcular la distancia entre dos rectas. Pero también, podemos usar las propiedades que nos conducen a vector de distancia mínima y de manera directa obtener su representación.

5 Ejercicios

1. Considere dos par de rectas es su forma explícita:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &: \vec{q}(t) = \vec{p}_0 + t\vec{a}_0 \\ \mathcal{L}_1 &: \vec{r}(s) = \vec{p}_1 + s\vec{a}_1\end{aligned}$$

   (a) ¿Cómo podemos saber si $\mathcal{L}_0 \parallel \mathcal{L}_1$?
   (b) ¿Cómo podemos saber si $\mathcal{L}_0 \perp \mathcal{L}_1$?

2. Considere dos par de rectas es su forma implícita:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &: \vec{n}_0 \cdot (p - p_0) = 0 \\ \mathcal{L}_1 &: \vec{n}_1 \cdot (p - p_1) = 0\end{aligned}$$

   (a) ¿Cómo podemos saber si $\mathcal{L}_0 \parallel \mathcal{L}_1$?
   (b) ¿Cómo podemos saber si $\mathcal{L}_0 \perp \mathcal{L}_1$?

3. Lugares geométricos. Describa los siguientes lugares geométricos.

   (a) $\mathcal{S} = \{p |\ d(p, \text{eje } x) + d(p, \text{eje } y) = 4\}$
   (b) $\mathcal{S} = \left\{p |\ d(p, y = \frac{1}{2}x) + d(p, y = -\frac{1}{2}x) = \text{cte.}\right\}$
   (c) $\mathcal{S} = \{p |\ d(p, \text{semicírculo de radio } 2) = 1\}$
   (d) $\mathcal{S} = \{p |\ d(p, \mathcal{C}((0,0), 4)) = d(p, (0, 10))\}$

4. Problemas del examen final del semestre anterior.