Geometría Analítica I

Una respuesta al Examen Final

Profesor: Pablo Barrera

Resuelva adecuadamente los siguientes ejercicios.

1. Indique la forma de la gráfica de la ecuación

$$y^3 - y - x^2 = 0.$$

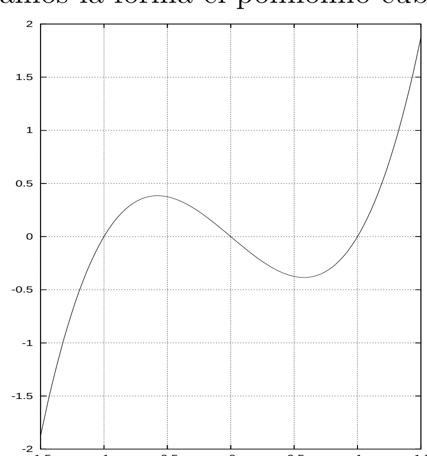
Buscando una representación explícita de la curva en término de y, tenemos que

$$\begin{aligned} x^2 &= y^3 - y = y(y^2-1) \\ &= y(y+1)(y-1) \end{aligned}$$

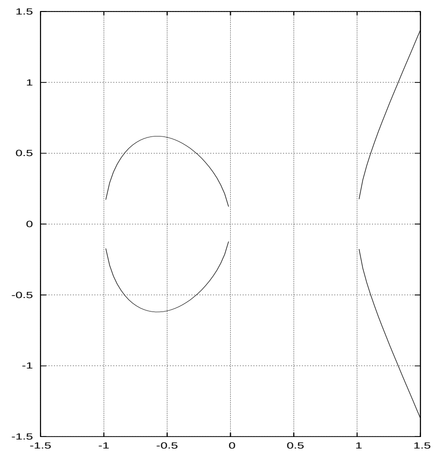
y con esto tenemos

$$x = \pm\sqrt{y(y+1)(y-1)}$$

Para graficar, observamos la forma el polinomio cúbico $g(y) = y(y+1)(y-1)$



nos quedamos con la parte positiva de la curva, y graficamos con respecto a la raíz cuadrada obteniendo



2. Trace la gráfica de la función

$$y = f(x) = (x + 3)x(x - 2) + 1,$$

y encuentre sus ceros usando el método de Newton.

Se hace un estudio sobre la forma de la cúbica alrededor del cero, se observa que es positiva para $x > 0$, negativa para $x < 0$.

Para graficarla, observamos la cúbica $h(x) = (x+3)x(x-2)$ que tiene por ceros $x = -3$, $x = 0$ y $x = 2$, con lo cual, trazamos la gráfica de esa cúbica y la recorremos hacia arriba para obtener la gráfica de $f(x) = (x + 3)x(x - 2) + 1$

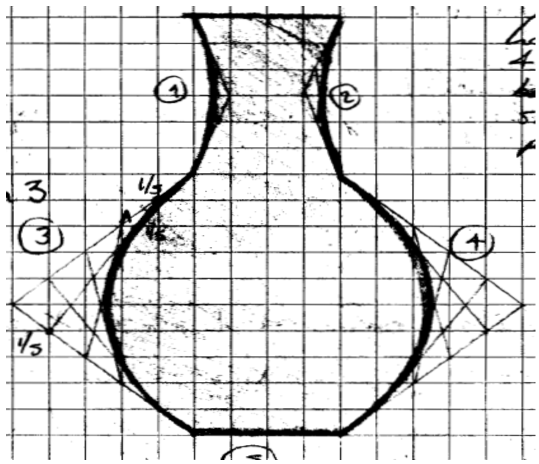
Usamos los ceros de $h(x)$ como punto inicial para dar con los ceros de $f(x)$ usando el método de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

3. Construya una botella parabólica.

La idea es construir un polígono y señalar los puntos de control sobre los cuales se usará el algoritmo de Casteljau para lograr la curva de bezier. Por diseño, para formar la boca de la botella, se considera un polígono abierto, y para construir el cuerpo de la botella, se debe considerar un cambio de convexidad.

.

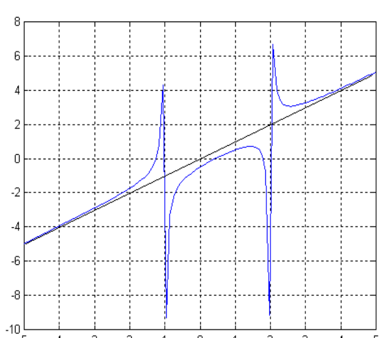


4. De la expresión analítica de una función que tenga polos en -1 y 2, y que asintóticamente se parezca a $f(x) = x$; grafíquela.

   Dado los polos, la función debe ser un cociente, y dado que se comporta como $f(x) = x$ cuando es "grande" $x \gg 0$ o $x \ll 0$, se propone

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{(x+1)(x-2)} + x \\
&= \frac{x^3 - x^2 - 2x + 1}{(x+1)(x-2)}
\end{aligned}
$$

.

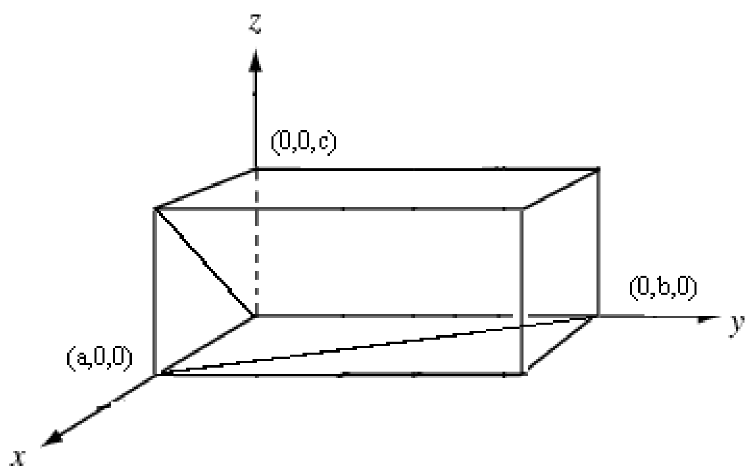


Una propuesta general de una función de esas características sería de la forma

$$f(x) = \frac{ax+b}{(x+1)(x-2)} + x$$

donde a o b son distintos de cero.

5. Considere el paralepípedo formado por lo puntos $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ y $(0,0,c)$, como en la figura siguiente



encuentre la distancia entre la diagonal $\overline{(a,0,0)(0,b,0)}$ y la diagonal $\overline{(0,0,0)(a,0,c)}$.

La distancia entre ambas diagonales, es la distancia más corta entre ellas, la cual se logra en un punto p de a diagonal $\overline{(a,0,0)(0,b,0)}$ y un punto q de la diagonal $\overline{(0,0,0)(a,0,c)}$. Con esta idea consideremos cada uno de esos puntos sobre los segmentos señalados

$$p = \alpha(a,0,c)$$

$$q = (a,0,0) + \beta(-a,b,0)$$

consideremos el vector

$$\begin{aligned}
\vec{pq} &= q - p = (a,0,0) + \beta(-a,b,0) - \alpha(a,0,c) \\
&= (a - \beta a - \alpha a, \beta b, -\alpha c) \\
&= (a(1-\beta-\alpha), \beta b, -\alpha c)
\end{aligned}$$

Si deseamos econtrar p y q donde se logra la distancia más corta, por propiedad, el vector $\vec{pq}$ debe ser ortogonal al vector $(a, 0, c)$ y a $(-a, b, 0)$, con esto, debe cumplirse que

$$\begin{aligned} a^2(1-\beta-\alpha)-\alpha c^2 &= 0 \\ -a^2(1-\beta-\alpha)+\beta b^2 &= 0 \end{aligned}$$

al resolver el sistema para α y β, tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a^2b^2}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2} \\ \beta &= \frac{a^2c^2}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2} \end{aligned}$$

con lo que el vector de la distancia más corta entre las diagonales es de la forma

$$\begin{aligned} \vec{pq} &= \frac{1}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}(b^2c^2a, a^2c^2b, -a^2b^2c) \\ &= \frac{abc}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}(bc, ac, -ab) \end{aligned}$$

y la norma de ese vector, la distancia más corta entre las diagonal es

$$\begin{aligned} \|\vec{pq}\| &= \frac{abc}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2} \\ &= \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}} \end{aligned}$$

6. Considere el triángulo formado por los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(4, 2, 0)$ y $C(0, 5, 5)$.

   Consideremos los vectores formados por los lados del triángulo

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \vec{AB} = B - A = (4, 2, 0) - (0, 0, 0) = (4, 2, 0) \\ \vec{c} &= \vec{AC} = C - A = (0, 5, 5) - (0, 0, 0) = (0, 5, 5) \end{aligned}$$

a) El Área del triángulo.

Usando el producto cruz tenemos

$$\begin{aligned}\vec{b} \times \vec{c} &= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \hat{\imath}10 - \hat{\jmath}20 + \hat{k}20 \\ &= 10(\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}\end{aligned}$$

y su norma $\|\vec{b} \times \vec{c}\| = 30$, con lo cual el área del triángulo es

$$\text{Área}(\triangle) = \|\vec{b} \times \vec{c}\|/2 = 15.$$

b) Las coordenadas del centro de gravedad.

El centro de gravedad se calcula inmediatamente a partir de su representación baricéntrica

$$\mathcal{G} = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$$

c) El radio R del circuncentro, y el radio r del incentro.

Calculemos los segmentos del triángulo

$$\begin{aligned}b &= \|\vec{b}\| = \sqrt{20} \\ c &= \|\vec{c}\| = \sqrt{50} \\ a &= \|\vec{b} - \vec{c}\| = \sqrt{50}\end{aligned}$$

Ahora bien, contando con los lados y el área, recordemos cómo están relacionados el radio R del circuncentro, y el radio r del incentro.

$$\text{Área}(\triangle) = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}(ar + br + cr) = sr$$

donde s es la semisuma $1/2(a + b + c)$, calculando tenemos

$$s = \frac{\sqrt{20} + 2\sqrt{50}}{2} = \sqrt{5} + \sqrt{50} \approx 9.1$$

con lo cual

$$r \approx 15/9.1 = 1.6484$$

y el radio del circuncentro

$$R = 3.7268$$

d) Las coordenadas del ortocentro.

El ortocentro es el punto de intersección de las alturas de un triángulo. La idea es expresar la interseción por sus coordenadas baricéntricas,

$$\vec{p} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C}$$

Considerando el vector que parte del vértice A hacia p

$$\begin{aligned} \vec{Ap} &= \vec{p} - \vec{A} \\ &= \beta(4,2,0) + \gamma(0,5,5) \\ &= (4\beta, 2\beta + 5\gamma, 5\gamma) \end{aligned}$$

y observar que es ortogonal al segmento $\overline{BC}$, es decir

$$\begin{aligned} (\vec{p} - \vec{A}) \cdot (\vec{B} - \vec{C}) &= 0 \\ &= 4\beta, 2\beta + 5\gamma, 5\gamma) \cdot (4, -3, -5) \\ &= 10\beta - 40\gamma = 0 \end{aligned}$$

obtenemos

$$\beta = 4\gamma.$$

Hacemos ahora un procedimiento análogo al observar que

$$(\vec{p} - \vec{B}) \perp (\vec{C} - \vec{A})$$

calculando

$$\begin{aligned}\vec{p}-\vec{B} &= \beta(4,2,0)+\gamma(0,5,5)-(4,2,0)\\ &= (4\beta-4,2\beta+5\gamma-2,5\gamma)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\vec{p}-\vec{B})\cdot(\vec{C}-\vec{A}) &= 0\\ &= (4\beta-4,2\beta+5\gamma-2,5\gamma)\cdot(0,5,5)\\ &= 2\beta-2+10\gamma=0\end{aligned}$$

y con la relación anterior, obtenemos que

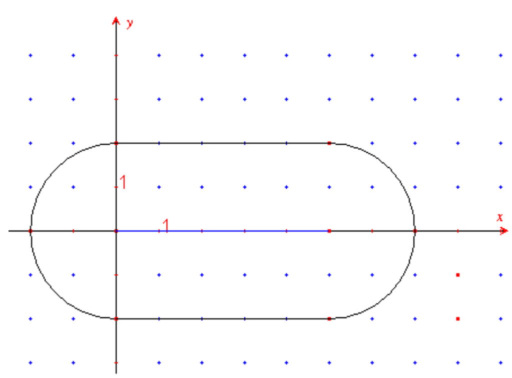
$$\gamma=\frac{1}{9},\qquad \beta=49$$

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \frac{4}{9}(4,2,0)+\frac{1}{9}(0,5,5)\\ &= \frac{1}{9}(16,13,5)\end{aligned}$$

7. Describa el lugar geométrico

$$\mathcal{S}=\left\{p|\ d(p,\overline{(0,0)(5,0)})=2\right\}$$

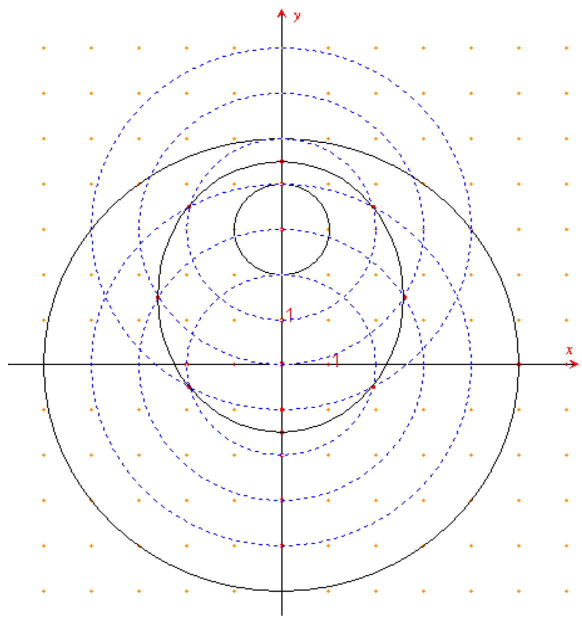
Dado un segmento, en $\mathbb{R}^2$, colocamos dos de ellos paralelos a una distancia 2, y en los extremos se forma un semi círculo ya que solo se toma en cuenta un punto para definir parte del lugar geométrico. Con esto alrededor del segmento, se forma una cápsula.



8. Describa el lugar geométrico

$$\mathcal{S} = \{p|\ d(p, \mathcal{C}((0,0),5)) = d(p, \mathcal{C}((0,3),1))\}$$

La idea es elemental, trazar círculos concéntricos en $(0,0)$ y en $(0,3)$, de forma que hacia la circunferencia primera haya una distancia igual que a la segunda, con esto los puntos de intersección satisfacen el lugar geométrico, el cual es una elipse.

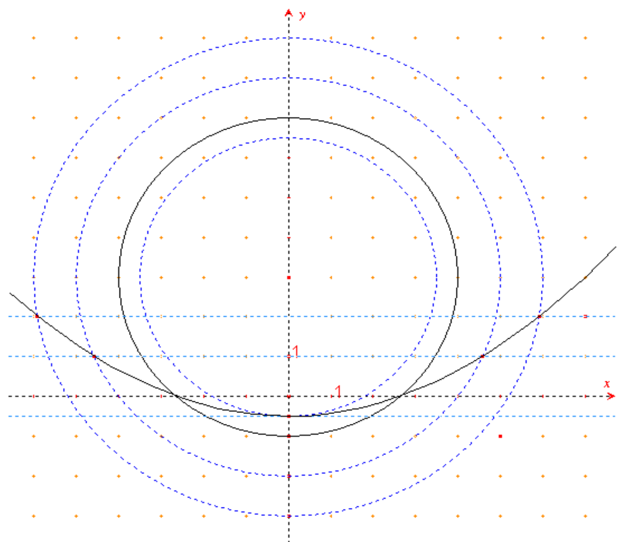


9. Describa el lugar geométrico

$$\mathcal{S} = \{p|\ d(p,\ \text{eje } x) = d(p, \mathcal{C}((0,3),4))\}$$

Nos basamos en que la distancia de un punto $P(x,y)$ hacia el eje x, es el valor absoluto de la ordenada y de ese punto, con esto, la idea de la construcción de este lugar geométrico, es elemental, se trazan circunferencias concéntricas en $(0,3)$ y recta paralelas al eje, de manera que la distancia hacia la cinferencia fija sea igual hacia el eje, los puntos de intersección pertencen al lugar geométrico, el cual es una parábola.

.



10. Descriptiba el lugar geométrico

$$\mathcal{S} = \{p|\ d(p,(0,2)) + d(p,\ \text{eje } x) = 4\}$$

La distancia de un punto $P(x, y)$ hacia el eje x, es el valor absoluto de la ordenada y de ese punto, con esto, y tendemos que los punto $P(x, y)$ del lugar geométrico se expresan de la forma

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} + |y| = 4$$

tomando el cuadrado para deshacernos de $\sqrt{}$

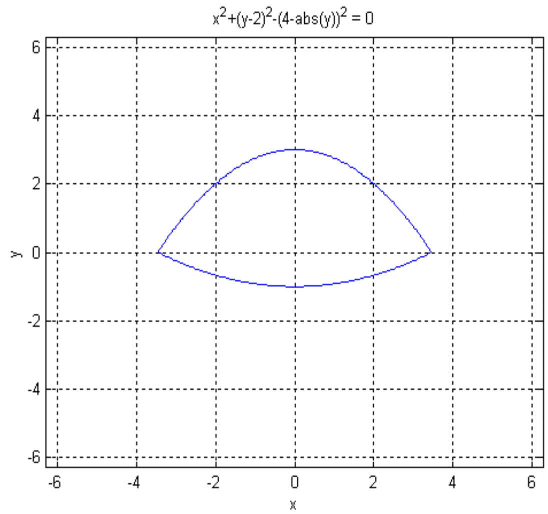
$$x^2 + (y-2)^2 = (4 - |y|)^2$$

tenemos una forma implícita para el lugar geométrico

$$x^2 + (y-2)^2 - (4 - |y|)^2 = 0$$

el cual representa a dos segmentos de parábolas, dependiendo del valor absoluto.

.



x2+(y-2)2-(4-abs(y))2 = 0
6
4
2
0
-2
-4
-6
y
-6
-4
-2
0
2
4
6
x